

I N L E I D I N G

tot de

I N Q U I T I O N I S T I S C H E W I S K U N D E

College van Prof. Dr A. Heyting

(Cursus 1952 - 1953)

Uitgewerkt door J.J. de Jongh

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

I N H O U D .

	pag.
§ 1. Inleidende Opmerkingen over Intuitionistische Wiskunde	1.
§ 2. Logische Voegtekens	3.
§ 3. Het Rekenen met Intervallen	5.
§ 4. Reële Getallen	10.
§ 5. Lineaire Algebra	28.
§ 6. Veeltermen	41.
§ 7. Limietprocessen	45.
§ 8. Enkele Opmerkingen over Continue Functies	60.
§ 9. Verzamelingen, Spreidingen en Soorten	62.
§ 10. Machtigheden van Soorten	71.
§ 11. Ordeningstheorie	73.
§ 12. Welgeordende Soorten	75.
§ 13. Voorbereidingen tot het Bewijs van de Hoofdstelling over Finiete Spreidingen	80.
§ 14. Bewijs van de Hoofdstelling over Finiete Spreidingen	83.
§ 15. Literatuur	92.
Errata	98.

§ 1 : Inleidende Opmerkingen over Intuitionistische Wiskunde.

1.1. Het uitgangspunt van de intuitionistische wiskunde wordt gevonden in de mogelijkheid de natuurlijke getallen

1, 2, 3, 4, ...

in onze geest op te bouwen door uit te gaan van een eenheid, daar een eenheid bij te voegen en dit proces willekeurig vaak te herhalen [Brouwer, 1907.]¹⁾

Onder een natuurlijk getal verstaat de intuitionist dus een entiteit, welke op deze wijze opgebouwd is. Dit is geen definitie van het type: "een priemgetal is een natuurlijk getal, dat slechts door de eenheid en zichzelf deelbaar is", maar eerder een van het type: "dingen noemen we rood, indien zij er zó en zó (hier wordt naar bepaalde rode dingen gewezen) uitzien.

1.2. In de klassieke wiskunde beschouwt men soms natuurlijke getallen, welke niet onder deze definitie vallen. Een voorbeeld hiervan is op de volgende wijze te construeren:

Er zijn een groot aantal priemgetaltweelingen (d.w.z. priemgetal paren met verschil 2) bekend, bijv.: 3,5; 5,7; 11,13; 17,19; Het is een onopgelost probleem P of er oneindig veel priemgetaltweelingen zijn.

Klassiek is het dus niet zeker, dat de definitie:
" $n \in \mathbb{D}$ [het grootste priemgetal, waarvoor $n+2$ ook priem is]"
een natuurlijk getal bepaalt, maar wel zegt men, dat dit zeker het geval is voor de gewijzigde definitie:
" $n' \in \mathbb{D}$ [het grootste priemgetal, waarvoor $n+2$ ook priem is, indien er maar eindig veel priemgetaltweelingen bestaan, 1, indien dit niet het geval is]".

1.3. Dit getal n' is echter niet uit eenheden op te bouwen, zolang het probleem P niet opgelost is. Na de eerste eenheid is het namelijk onbekend, of we hier nog een tweede aan moeten toevoegen of niet.

Als we dus zo nauwkeurig willen kijken, als de intuitionist doet, moeten we onderscheid maken tussen "behoorlijk volgens de definitie opgebouwde" natuurlijke getallen (deze zijn de belangrijkste en daarom reserveren we de naam "natuurlijke getallen" hiervoor) en getallen als het getal n' . Ook deze laatste zijn in de intuitionistische wiskunde onder te brengen, maar op een plaats, waar zij duidelijk van de behoorlijke natuurlijke getallen te onderscheiden zijn.

1.4. Om in staat te zijn het getal n' uit eenheden op te bouwen, was het nodig het probleem P op te lossen. We moesten in staat zijn uit te maken, wat waar was:

of: er bestaan oneindig veel priemgetaltweelingen,

of: er bestaan slechts eindig veel priemgetaltweelingen,
en we waren daartoe niet in staat.

De klassieke logicaregel (het principium tertii exclusi), dat iedere uitspraak waar of niet waar is, hielp ons niet, omdat het woord "of" hier in een betekenis gebruikt wordt, welke niet garandeert, dat een beslissing door een eindige berekening tussen de twee alternatieven mogelijk is.

Het blijkt dus, dat in de intuitionistische wiskunde een voegwoord "of" van belang is, dat zo gebruikt wordt, dat "A of B" betekent: "ik ben in staat door een eindige berekening één van de twee uitspraken A en B uit te kiezen, en van deze uitspraak de waarheid aan te tonen".

¹⁾ "[schrijversnaam, jaartal]" verwijst naar de vollediger citaten in de literatuurlijst in § 15.

Dit sluit niet uit, evenmin als dit bij het zwakke "of" uit de klassieke wiskunde het geval is, dat ook de andere niet uitgekozen uitspraak waar kan zijn.

1.5. Omdat er nu uitspraken P bestaan, waarvoor geen constructieve berekening bekend is om tussen P en niet- P te beslissen, is het duidelijk, dat voor dit sterke "of" (en dit is weer het belangrijkste "of", dat in de intuïtionistische wiskunde gebruikt wordt) het principium tertii exclusi niet steeds geldt [Brouwer, 1908].

1.6. Daarnaast is ook in de intuïtionistische wiskunde een zwak "of" te beschouwen, dat geen beslisbaarheid tussen de alternatieven inhoudt. Dit zwakke "of" is echter evenals in de klassieke logica door middel van "en" en "niet" te definiëren (zie § 2.3). Daarom is voor dit "of", waarvoor het principium tertii exclusi ook intuïtionistisch wel geldt, geen bijzonder woord of teken nodig [Gödel, 1932].

1.7. Omdat de intuïtionist zich ten doel stelt, wiskunde te beoefenen door het opbouwen van wiskundige systemen in de eigen geest, wordt hij er toe gebracht, de vraag belangrijk te vinden, of hij in staat is een bepaalde constructie inderdaad uit te voeren, of niet. Hierdoor wordt hij gedwongen in de wiskundige begrippen onderscheidingen aan te brengen, welke door de klassieke wiskunde verwaarloosd worden (voorbeeld: "behoorlijk natuurlijk getal" tegenover "getal als n "; "sterk of" tegenover "zwak of"). De wiskunde wordt hierdoor soms gecompliceerder, maar steeds veel inhoudrijker.

1.8. Naast de intuïtionistische opvatting over de wiskunde zijn misschien andere opvattingen mogelijk. Om intuïtionistische wiskunde te beoefenen, is het niet noodzakelijk de intuïtionistische opvatting als de enig-houdbare te beschouwen. Zij is echter zeker een belangrijke en voor de hand liggende interpretatie van wat de naieve wiskundige eigenlijk wil doen, en geeft aanleiding tot vele en interessante problemen.

1.9. Een in de taal geformuleerde wiskundige stelling, is voor de intuïtionist een verslag over het opbouwen van zekere wiskundige systemen in zijn geest. Hij hoopt, dat dit verslag uitvoerig en precies genoeg zal blijken te zijn, om andere wiskundigen in staat te stellen, analoge systemen in hun geest op te bouwen [Brouwer, 1907, 1919, 1929, 1933, 1948, 1952].

1.10. De betekenis van het woord "niet" is daarom in de intuïtionistische wiskundetaal (en ook in die der klassieke mathesis) afwijkend van degene, die in de dagelijkse taal domineert.

Betekent een zekere wiskundige uitspraak A namelijk, dat een constructie C uitgevoerd is, dan zou de negatie hiervan in de dagelijkse taal betekenen, dat de constructie C niet uitgevoerd was.

Dat echter een zekere gelijkheid bijvoorbeeld niet berekend is, omdat de wiskundige er nog geen tijd voor heeft gehad, is geen mededeling van wiskundig belang. Wel van wiskundig belang is de mededeling, dat de aanname, dat deze berekening uitgevoerd zou zijn, tot een contradictie, bijvoorbeeld tot $0 = 1$, zou leiden.

1.11. We reserveren daarom in de intuïtionistische taal het woord "niet" meestal voor deze betekenis en onderstrepen het dan.

Indien dus weer de uitspraak A betekent, dat de constructie C uitgevoerd is, dan betekent niet A : uit de aanname, dat de constructie C uitgevoerd zou zijn, is een contradictie afgeleid.

Soms echter, wanneer we alleen, eigenlijk buiten de wiskunde, zeggen, dat een zeker probleem niet opgelost is, gebruiken we het dagelijkse "niet".

1.12: Niettegenstaande deze verschillen tussen intuitionistische en klassieke wiskunde, komen beide uiterlijk weer vrijwel geheel overeen voor zoverre het de elementaire theorie van het natuurlijke getal betreft. De getallen, waarvan de klassieke wiskunde het bestaan beweert (som, product, enz.), blijken in dit gebied namelijk steeds te construeren te zijn, indien de gegeven uitgangsgetallen "behoorlijk" zijn. De uitspraken, die de klassieke wiskunde doet (gelijkheden, ongelijkheden) blijken steeds beslisbaar te zijn.

De intuitionistische wiskunde beperkt zich hier echter steeds tot behoorlijke getallen en kan pas later een analoge theorie voor getallen als n opbouwen.

1.13: De constructie van de gehele getallen als paren van natuurlijke getallen, en van de breuken als drietallen van natuurlijke getallen, verloopt ook geheel parallel met de klassieke theorie [Heyting, 1935-1939]. De eerste wezenlijke divergenties treden op in de theorie van het reële getal.

§ 2 : Logische Voegtekens.

2.1: Ter afkorting, en ook ter systematisering van het taalgebruik, zullen in de uiteenzetting van de intuitionistische wiskunde zo nu en dan gehele uitspraken door hoofdletters aangegeven en voegwoorden door logische voegtekens vervangen worden.

In deze paragraaf willen we de te gebruiken tekens opsommen en hun intuïtieve betekenis zo nauwkeurig mogelijk in woorden omschrijven.

2.2:

1°) $\wedge$: het gewone "en" uit de dagelijkse taal en uit de klassieke wiskunde.

$A \wedge B$ betekent: "de door A en door B bedoelde constructies zijn beide uitgevoerd."

2°) $\rightarrow$: een "als ..., dan ...", dat sterker is dan de in de klassieke wiskunde gebruikte materiële implicatie.

[Hoewel de uit de beide zinnen "A" en "B" opgebouwde zin "als A, dan B" of afgekort

" $A \rightarrow B$ " natuurlijk iets geheel anders is dan de zin over de zinnen "A" en "B" " A impliceert "B", gebruiken we toch, de gewoonte volgend voor de eerste de naam "implicatie".]

$A \rightarrow B$ betekent: "ik bezit een constructiemethode, welke mij de mogelijkheid biedt om iedere willekeurige mij gegeven constructie, welke door A bedoeld wordt, tot een constructie, welke door B bedoeld wordt, te vervolledigen [Freudenthal, 1936; Heyting, 1936].

3°) $\neg$: het sterke "niet", dat in (1.10) en (1.11) besproken werd.

$\neg A$ betekent dus: "ik bezit een constructiemethode, welke mij in staat stelt, om iedere willekeurige, mij gegeven constructie, welke door A bedoeld wordt, tot een constructie van een contradictie te vervolledigen.

Gebruiken we het teken $\perp$ om een willekeurige contradictie (bijv. " $0 = 1$ ") aan te duiden, dan betekent " $\neg A$ " hetzelfde als " $A \rightarrow \perp$ ".

4°) $\vee$: het sterke, niet uitsluitende "of", dat in (1.4) en (1.5) besproken werd.
 $A \vee B$ betekent dus: "ik bezit een constructie, welke 1° mij een keuze tussen de twee uitspraken A en B mogelijk maakt en

2°: de door de uitgekozen uitspraak bedoelde constructie bevat.

5°) $\iff$: het bij " $\rightarrow$ " behorende sterke equivalentieteken: "... dan en slechts dan,".
 Dit is te definiëren als:

$$A \iff B \stackrel{\text{D}}{=} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

2.3: Opmerking: Het in (1.11) genoemde zwakke "niet" is een woord buiten de wiskundige taal.

De in de klassieke wiskunde gebruikte zwakke voegtekens "of" en "als ..., dan ..." ("materiele implicatie") kunnen intuïtionistisch gedefinieerd worden als:

$$A \stackrel{\text{ZW}}{\vee} B \stackrel{\text{D}}{=} \neg(\neg A \wedge \neg B).$$

$$A \stackrel{\text{ZW}}{\rightarrow} B \stackrel{\text{D}}{=} \neg(A \wedge \neg B).$$

[Gödel, 1932].

2.4: 6°) $\forall x$: het gewone "voor alle x ..." uit de dagelijkse taal en de klassieke wiskunde.

$\forall x[A(x)]$ betekent dus: "ik bezit een constructiemethode, welke voor iedere willekeurige, gegeven entiteit x uit het variabelengebied, waarover we spreken (bijvoorbeeld: de natuurlijke getallen, de reële getallen), mij in staat stelt, de door $A(x)$ bedoelde constructie uit te voeren.

7°) $\exists x$: het sterke "er bestaat een x , zodat ...".
 $\exists x[A(x)]$ betekent: "ik ken een constructie, welke 1° een entiteit x uit het variabelengebied, waarover we spreken, uitkiest, 2°: de voor deze entiteit x door $A(x)$ bedoelde constructie bevat.

2.5: Opmerking: Het zwakke "er bestaat een x , zodat ..." uit de klassieke wiskunde is weer te definiëren als:

$$\exists_{\text{ZW}} x [A(x)] \stackrel{\text{D}}{=} \neg \forall x [\neg A(x)].$$

2.6: Uitgaande van de betekenis van de zo juist ingevoerde voegtekens, kunnen we onmiddellijk inzien, dat bepaalde uitspraken, die d.m.v. deze tekens uit zekere constituerende uitspraken A, B, C, ... opgebouwd zijn, voor willekeurige wiskundige uitspraken A, B, C, ... waar zijn. Dit betekent dus, dat de door de samengestelde uitspraak bedoelde constructie steeds uit te voeren is, welke constructies ook met A, B, C, ... bedoeld worden.

2.7: Voorbeelden van dergelijke op grond van de betekenis der voegtekens steeds ware uitspraken zijn:

$$A \wedge B \rightarrow A$$

$$A \wedge B \rightarrow B \wedge A$$

$$A \rightarrow A \vee B$$

$$A \vee B \rightarrow B \vee A$$

$$A \rightarrow A$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \text{ "contrapositie"}$$

$$A \rightarrow \neg \neg A$$

$$\begin{aligned} A(a) &\rightarrow \exists_x A(x) \\ \exists_x A(x) &\rightarrow \neg \forall_x [\neg A(x)]. \end{aligned}$$

Waar in de nu volgende opbouw van de intuïtionistische wiskunde van dergelijke algemeen geldende uitspraken gebruik zal gemaakt worden, zal steeds dit algemeen gelden, uit de betekenis van de voegtekens afgeleid worden.

Voor de zwakke voegtekens zijn, naar weer op grond van de betekenis in te zien is, alle volgens de klassieke uitspraak en praedicatenrekening geldige samengestelde uitspraken, algemeen geldend [Gödel, 1932; Kleene, 1952].

2.8: Het is ook mogelijk een andere methode te gebruiken om dergelijke algemeen geldende uitspraken op te sporen.

We beschouwen hiertoe twee samengestelde uitspraken α en β , uit constituerende uitspraken $A, B, C, \dots$ opgebouwd d.m.v. de logische voegtekens, en onderstellen, dat, zowel α , als $\alpha \rightarrow \beta$ voor willekeurige $A, B, C, \dots$ geldig zijn. Dan kunnen we op grond van de betekenis van " $\rightarrow$ " inzien, dat ook β voor willekeurige $A, B, C, \dots$ geldig is.

2.9: Uitgaande van een klein aantal van dergelijke samengestelde uitspraken $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, waarvan de algemeen-geldigheid onmiddellijk uit de betekenis van de voegtekens in te zien is, kunnen we nu door toepassen van bovenstaande regel, en eventueel van andere regels, waarvan we de algemeengeldigheid inzien, verdere algemeen geldende uitspraken afleiden.

Een opbouw van de Intuïtionistische Logica op deze wijze werd gegeven in: [Heyting, 1930, 1930 A].

Een uitvoerige behandeling van dit onderwerp is te vinden in: [Kleene, 1952].

§ 3. Het Rekenen met Intervallen.

3.1: In de intuïtionistische wiskunde wordt een reëel getal meestal gedefiniëerd - zie § 4 - als een inkrimpende, convergente rij rationale intervallen [L.E.J. Brouwer, 1918-1919, II pag. 3; A. Heyting, 1935-1939]. Ter voorbereiding behandelt deze paragraaf het rekenen met deze intervallen.

3.2: Definitie: Een (rationaal) interval A is een geordend paar rationale getallen a_1 en a_2 met $a_1 \leq a_2$.

$$A \equiv (a_1, a_2)$$

3.3: Zij $A \equiv (a_1, a_2)$ en $B \equiv (b_1, b_2)$, dan definiëren wij:

$$\begin{aligned} A \approx B \equiv & a_1 \leq b_1 \leq a_2 \vee a_1 \leq b_2 \leq a_2 \vee \\ & \vee b_1 \leq a_1 \leq b_2 \vee b_1 \leq a_2 \leq b_2 \end{aligned}$$

(spreek uit: A raakt B).

A raakt dus B dan en slechts dan, indien de beide afgesloten intervallen een punt gemeen hebben. Deze karakteristieke eigenschap (3.8) gebruiken we echter niet als definitie, omdat we liever alleen over de paren eindpunten van het inter-

val en niet over de oneindig veel punten in het interval spreken.

$$A \not\approx B \stackrel{\text{D}}{=} \neg(A \approx B)$$

(spreek uit: A buiten B)

$$A < B \stackrel{\text{D}}{=} a_2 < b_1$$

$$A \not< B \stackrel{\text{D}}{=} \neg(A < B).$$

3.4: Opmerking: De relaties $<$ en $\leq$ tussen rationale getallen zijn te reduceren tot dezelfde relaties tussen natuurlijke getallen. Voor ieder paar gegeven rationale getallen a en b is dus uit te maken, welke van de beide relaties $a < b$ en $\neg(a < b)$ vervuld is. Steeds geldt hiervoor dus:

$$a < b \vee \neg a < b.$$

Dergelijke relaties $<$ (en om dezelfde reden $\leq$ en $=$) noemen we beslisbaar.

3.5: Uit de bovenstaande definities volgt dan, dat ook de relaties $\approx$, $\not\approx$, $<$, $\not<$ tussen intervallen beslisbaar zijn.

Om dit te laten te zien, namen we als voorbeeld $A \not\approx B$. Voor ieder van de vier componenten $a_1 \leq b_1 \leq a_2, \dots, b_1 \leq a_2 \leq b_2$ van de disjunctie uit het definiens kunnen we uitmaken of deze waar is of niet. Ook voor de gehele disjunctie is dus uit te maken of hij waar is (dwz. of minstens één van de componenten waar is) of niet waar (dwz. of alle componenten niet waar zijn).

Analoog laten we zien, dat de relaties $\not<$, $<$, $\leq$ tussen rationale intervallen beslisbaar zijn, terwijl ook de algemene stelling intuïtief duidelijk is:

St: Iedere uitspraak, die uit beslisbare uitspraken opgebouwd is door middel van $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ en $\neg$, is zelf ook beslisbaar.

Omdat we voor een oneindig aantal stuk voor stuk beslisbare formules A_i niet steeds kunnen uitmaken of zij alle waar zijn, heeft een uitspraak, welke uit een rij beslisbare formules A_i ontstaat door de generalisatiequantificator $\forall_i$ voor A_i te plaatsen, zelf niet beslisbaar te zijn. Evenmin heeft de uitspraak met $\exists_i$ ervoor beslisbaar te zijn.

3.6: Voor een beslisbare uitspraak - neem als voorbeeld weer $A \approx B$ - is het direct in te zien, dat we, indien we weten, dat deze niet niet waar is, daaruit kunnen concluderen, dat hij waar is.

Dus geldt zeker:

St $\neg \neg A \approx B \rightarrow A \approx B$ en analoge stellingen voor

$\not\approx$, $<$ en $\leq$.

Uitspraken, welke op deze wijze uit hun dubbele negatie volgen, noemen we stabiel [van Dantzig, 1947].

We zagen dus in, dat de volgende stelling in de intuitionistische logica moet gelden:

St: Iedere beslisbare uitspraak is stabiel.

In (4.14) zullen we laten zien, dat omgekeerd niet iedere stabiele uitspraak beslisbaar hoeft te zijn.

De stellingen, waarvan we hier intuïtief de geldigheid voor de intuitionistische logica lieten zien, kunnen in het geformaliseerde systeem hiervan formeel afgeleid worden.

3.7: De rakingsrelatie is reflexief en symmetrisch, maar niet transitief.

$$\begin{aligned} A \not\prec B &\iff a_2 < b_1 \vee b_2 < a_1 \\ A \not\prec B &\iff A < B \vee B < A \\ A \not\prec B &\iff a_2 \geq b_1 \\ A \approx B &\iff A \not\prec B \wedge B \not\prec A \end{aligned}$$

3.8: Zij p een rationaal getal en $A = (a_1, a_2)$ een interval, dan Def.: $p \in A \iff a_1 < p < a_2$

St: $\exists p [p \in A \wedge p \in B] \iff A \approx B$.

Aan ieder rationaal getal p is het oneigenlijke interval

$$P = (p, p)$$

toe te voegen.

3.9: Zij $A = (a_1, a_2)$ en $B = (b_1, b_2)$ dan definiëren we de bewerkingen met intervallen door:

$$\begin{aligned} A + B &\equiv_{\overline{D}} (a_1 + b_1, a_2 + b_2). \\ -A &\equiv_{\overline{D}} (-a_2, -a_1) \\ A \cdot B &\equiv_{\overline{D}} (c_1, c_2), \text{ waarbij} \\ c_1 &\equiv_{\overline{D}} \min(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2) \\ c_2 &\equiv_{\overline{D}} \max(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2) \\ A^{-1} &\equiv_{\overline{D}} \left(\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right) \end{aligned}$$

[deze definitie aanvaarden we alleen, zo $0 \notin A$].

$$\begin{aligned} \max\{A, B\} &\equiv_{\overline{D}} (\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}) \\ \min\{A, B\} &\equiv_{\overline{D}} (\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}) \\ |A| &\equiv_{\overline{D}} \max\{A, -A, 0\}, \end{aligned}$$

waarbij we de afkorting gebruiken:

$$\max\{A, B, C\} \equiv_{\overline{D}} \max\{\max\{A, B\}, C\}$$

zodat geldt:

$$\max \{A, B, C\} \in \overline{D} (\max \{a_1, b_1, c_1\}, \max \{a_2, b_2, c_2\}).$$

Ieder in de rechterzijden als definiens gebruikt paar rationale getallen (x_1, x_2) bepaalt een interval, omdat steeds $x_1 \leq x_2$ is.

$$\begin{aligned} 3.10: \text{ St.: } & p \in A \wedge q \in B \rightarrow p + q \in A + B \\ & p \in A \rightarrow -p \in -A \\ & p \in A \wedge q \in B \rightarrow p \cdot q \in A \cdot B \\ & p \in A \rightarrow p^{-1} \in A^{-1} \\ & p \in A \wedge q \in B \rightarrow \max \{p, q\} \in \max \{A, B\} \\ & p \in A \rightarrow |p| \in |A|. \end{aligned}$$

Direct te bewijzen uit de definities 3.8 en 3.9.

Op dezelfde wijze is aan te tonen:

$$\begin{aligned} \text{St.: } & \exists p, q [p \in A \wedge q \in B \wedge x = p + q] \Leftrightarrow x \in A + B \\ & p \in A \Leftrightarrow -p \in -A \\ & \exists p, q [p \in A \wedge q \in B \wedge x = p \cdot q] \Leftrightarrow x \in A \cdot B \\ & p \in A \Leftrightarrow p^{-1} \in A^{-1} \\ & \exists p, q [p \in A \wedge q \in B \wedge x = \max\{p, q\}] \Leftrightarrow x \in \max \{A, B\} \\ & \exists p, q [p \in A \wedge q \in B \wedge x = \min\{p, q\}] \Leftrightarrow x \in \min \{A, B\} \\ & p \in A \rightarrow |p| \in |A|. \end{aligned}$$

3.11: Uit st. 3.8 en st. 3.10 volgt onmiddellijk de substitutie eigenschap van al deze bewerkingen met intervallen t.o.v. de rakingsrelatie.

$$\begin{aligned} \text{St.: } & A \approx A^* \wedge B \approx B^* \rightarrow A + B \approx A^* + B^* \\ & A \approx A^* \rightarrow -A \approx -A^* \\ & A \approx A^* \wedge B \approx B^* \rightarrow A \cdot B \approx A^* \cdot B^* \\ & A \approx A^* \rightarrow A^{-1} \approx A^{*-1} \\ & A \approx A^* \wedge B \approx B^* \rightarrow \max \{A, B\} \approx \max \{A^*, B^*\} \\ & A \approx A^* \wedge B \approx B^* \rightarrow \min \{A, B\} \approx \min \{A^*, B^*\} \\ & A \approx A^* \rightarrow |A| \approx |A^*|. \end{aligned}$$

3.12: Iedere rekenregel (door een vergelijking uitgedrukte identieke gelijkheid) welke door variabele en zekere constante rationale getallen geldt, kan geschreven worden als:

$$F(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m) = G(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m),$$

waarbij de functies F en G door een eindig aantal toepassingen van de bewerkingen:

$$+, -, \cdot, ^{-1}, \max, \min, |\dots|$$

opgebouwd zijn.

$$\exists p \in A \wedge q \in B \rightarrow \min \{p, q\} \in \min \{A, B\}$$

Zijn nu $A_1, \dots, A_n$ willekeurige intervallen en $C_1, \dots, C_m$, de aan de constanten $C_1, \dots, C_m$ toegevoegde constante oneigenlijke intervallen ($C_j = (c_j, c_j)$), dan kunnen we door toepassing van de definities 3.9 de functies $F(A_1, \dots, A_n, C_1, \dots, C_m)$ en $G(A_1, \dots, A_n, C_1, \dots, C_m)$ vormen, voor zoverre nergens door een interval, dat 0 bevat, gedeeld behoeft te worden.

Kiezen wij nu in ieder interval A_i een rationaal getal p_i , dan geldt volgens stelling 3.10

$$F(p_1, \dots, p_n, c_1, \dots, c_m) \in F(A_1, \dots, A_n, C_1, \dots, C_m) \text{ en}$$

$$G(p_1, \dots, p_n, c_1, \dots, c_m) \in G(A_1, \dots, A_n, C_1, \dots, C_m).$$

We veronderstellen, dat $F(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m) = G(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m)$ een rekenregel voor de rationale getallen is. Dus geldt:

$$F(p_1, \dots, p_n, c_1, \dots, c_m) = G(p_1, \dots, p_n, c_1, \dots, c_m).$$

Uit st. 3.8 volgt dan:

$$F(A_1, \dots, A_n, C_1, \dots, C_m) \subseteq G(A_1, \dots, A_n, C_1, \dots, C_m).$$

In woorden geformuleerd luidt het bewezene :

St.: Iedere rekenregel (door een vergelijking uitgedrukte identieke gelijkheid) welke voor variabele en zekere constante rationale getallen geldt, geldt ook, indien de gelijkheidsrelatie door de rakingsrelatie vervangen wordt, voor variabele intervallen en de, aan de constanten toegevoegde, constante oneigenlijke intervallen, wanneer tenminste hierbij nooit door een interval dat 0 bevat, gedeeld wordt.

Voorbeelden:

$$1 + 1 \approx 2$$

$$A + (-A) \approx 0$$

$$A(B + C) \approx AB + AC$$

$$(AB) \approx (BA) \cdot (B).$$

$$3.13: \text{St.: } |A| + |B| \approx |A + B|.$$

Deze stelling volgt niet onmiddellijk uit St. 3.12, maar is uit de definities 3.7 en 3.9 af te leiden, omdat:

$$\begin{aligned} \max \{a_2, -a_1, 0\} + \max \{b_2, -b_1, 0\} &\geq \\ &\geq \max \{a_2 + b_2, -(a_1 + b_1), 0\}. \end{aligned}$$

§ 4. Reële getallen.

4.1: We definiëren [L.E.J. Brouwer, 1918-1919, II pag. 3; A. Heyting, 1935-1939, IV, V, VI] een reëel getal α als een inkrimpende, convergente rij rationale intervallen, dwz. als als een rij $\{A_i\} = \{(a_{i,1}, a_{i,2})\}$ van intervallen $A_i = (a_{i,1}, a_{i,2})$ die voldoen aan:

I: $A_{i+1} \subseteq A_i$, d.w.z. $a_{i,1} \leq a_{i+1,1} \leq a_{i+1,2} \leq a_{i,2}$
en aan:

II: $\lim_{i \rightarrow \infty} (a_{i,2} - a_{i,1}) = 0$, d.w.z.

$\forall m \exists k(m) \forall i [i \geq k(m) \rightarrow (a_{i,2} - a_{i,1}) \leq 2^{-m}]$
waarbij de variabelen i, k, m de natuurlijke getallen doorlopen.

Het door " $\exists_{k(m)}$ " uitgedrukte existentiebegrip is, als steeds in de intuïtionistische wiskunde (2.4), in de constructieve betekenis gebruikt: bij ieder natuurlijk getal m moet het getal $k(m)$ werkelijk te berekenen zijn.

Uit I volgt: $i \geq k \rightarrow (a_{i,2} - a_{i,1}) \leq (a_{k,2} - a_{k,1})$.
Dus kan II vereenvoudigd worden tot:

$\forall m \exists k(m) [(a_{k,1} - a_{k,2}) \leq 2^{-m}]$.

4.2: De gelijkheidsrelatie tussen reële getallen wordt nu als volgt gedefiniëerd:

Def.: Zijn $\alpha = \{A_i\} = \{(a_{i,1}, a_{i,2})\}$
en $\beta = \{B_i\} = \{(b_{i,1}, b_{i,2})\}$ reële getallen, dan is:

$$\alpha = \beta \iff \forall i [A_i \approx B_i].$$

Het reële getal α' , dat uit α ontstaat, door een eindig aantal intervallen weg te laten is natuurlijk aan α gelijk.

4.3: Als eerste stelling over de gelijkheidsrelatie van reële getallen willen we bewijzen, dat deze, evenals de rakingsrelatie van intervallen, stabiel (3.6) is.

St.: $\neg \neg (\alpha = \beta) \leftrightarrow \alpha = \beta$.

Bewijs: $\rightarrow$: Met uitgeschreven definities luidt de stelling:

$$\neg \neg \forall i [A_i \approx B_i] \rightarrow \forall i [A_i \approx B_i].$$

Uit $\forall i [A_i \approx B_i]$ volgt voor ieder natuurlijk getal i zeker $A_i \approx B_i$. Onderstellen we dus

(1) $\neg A_i \approx B_i$
dan volgt daaruit $\neg \forall i [A_i \approx B_i]$.

Maar dit is strijdig met de praemisse $\neg \neg \forall_i [A_i \approx B_i]$.
Dus volgt uit de praemisse

$$\neg \neg A_i \approx B_i.$$

Maar $A_i \approx B_i$ was stabiel, dus uit $\neg \neg A_i \approx B_i$ volgt

$$A_i \approx B_i.$$

Dit alles geldt voor willekeurige i .

Dus volgt uit de praemisse

$$\forall_i [A_i \approx B_i].$$

$\leftarrow$: Dit volgt uit de onmiddellijk duidelijke logica-
stelling

$$A \rightarrow \neg \neg A \quad (2.7).$$

4.4: Opmerking: In het gehele bewijs hebben we over $A_i \approx B_i$ niets anders bekend ondersteld, dan dat het een, voor ieder vaste i stabiele uitspraak was. Het bewijs gaat dus door voor een willekeurige, voor ieder x stabiele uitspraak $P(x)$.

St.: Een voor ieder x stabiele uitspraak $P(x)$ gaat door/voegen van een generalisatiequantificator $\forall_x$ weer in een stabiele uitspraak over.

$$\forall_x [\neg \neg P(x) \rightarrow P(x)] \rightarrow (\neg \neg \forall_x [P(x)] \rightarrow \forall_x [P(x)])$$

4.5: De gelijkheidsrelatie tussen reële getallen is reflexief, symmetrisch en transitief.

$$\text{I. } \alpha = \alpha$$

$$\text{II. } \alpha = \beta \rightarrow \beta = \alpha$$

$$\text{III. } \alpha = \beta \wedge \beta = \gamma \rightarrow \alpha = \gamma$$

De eigenschappen I en II zijn onmiddellijke gevolgen van de reflexiviteit en symmetrie van de rakingsrelatie.

Voor III geven wij een bewijs uit het ongerijmde.

Onderstel, dat voor een zeker getal i zou gelden:

$$\alpha = \beta \wedge \beta = \gamma \wedge A_i \not\approx C_i$$

Dan geldt wegens 3.7

$$A_i < C_i \vee A_i > C_i.$$

Stel $A_i < C_i$ - het andere geval wordt geheel analoog behandeld -, dan is dus $a_{i,2} < c_{i,1}$.

Noem $2d = c_{i,1} - a_{i,2}$. Dus $d > 0$. Voor $j \geq i$ geldt dan $c_{j,1} - a_{j,2} \geq 2d$ wegens 4.1, I.

Volgens 4.1, II is bij deze gegeven $d > 0$ (dus $d > 2^{-m} > 0$, daar d een rationaal getal is) een $k(m)$ te vinden, zodat geldt

$$\forall_j [j \geq k \rightarrow (b_{j,2} - b_{j,1}) \leq d].$$

Kies nu $l = \max(k, i)$. Dan geldt dus:

$$c_{l,1} - a_{l,2} \geq 2d.$$

$$b_{l,2} - b_{l,1} \leq d.$$

Bovendien geldt $\alpha = \beta$, d.w.z. $\forall_i [A_i \approx B_i]$ dus $a_{l,2} \geq b_{l,1}$, terwijl analoog uit $\beta = \gamma$ volgt $c_{l,1} \leq b_{l,2}$.

Deze vier ongelijkheden zijn contradictoir. Dus geldt:

$$\alpha = \beta \wedge \beta = \gamma \rightarrow \neg \neg A_i \approx C_i$$

dus wegens $\neg \neg A_i \approx C_i \rightarrow A_i \approx C_i$

ook $\alpha = \beta \wedge \beta = \gamma \rightarrow A_i \approx C_i$ voor ieder getal i ,

dus ook $\alpha = \beta \wedge \beta = \gamma \rightarrow \forall_i [A_i \approx C_i]$ of met andere woorden

$$\alpha = \beta \wedge \beta = \gamma \rightarrow \alpha = \gamma \quad . \text{ Q.E.D. }$$

Aanschouwelijk geformuleerd: we leiden dus uit de aanname, dat het i^{de} interval A_i van α geheel buiten het i^{de} interval C_i van γ ligt, een contradictie af met $\alpha = \beta \wedge \beta = \gamma$, door een interval van β te kiezen, dat een lengte heeft kleiner dan de afstand tussen A_i en C_i . Dit kan dan niet met beide intervallen A_i en C_i punten gemeen hebben.

4.6: De ongelijkheidsrelatie tussen reële getallen kan op verschillende wijzen gedefiniëerd worden.

$$1^\circ: \alpha \neq \beta \stackrel{\text{D}}{=} \neg (\alpha = \beta).$$

$$\text{dus } \alpha \neq \beta \stackrel{\text{D}}{=} \neg \forall_i [A_i \approx B_i].$$

$$2^\circ: \alpha \neq \beta \stackrel{\text{D}}{=} \exists_i [A_i \not\approx B_i].$$

Spreek uit: α is verwijderd van β . Hierbij is de index i , waarvoor de intervallen A_i en B_i buiten elkander liggen, constructief te berekenen, wat bij de vorige definitie niet het geval behoeft te zijn.

Boven (4.3) zagen we reeds:

$$\neg \alpha \neq \beta = \alpha = \beta.$$

4.7: Verdere betrekkingen tussen "gelijk", "verwijderd" en "ongelijk" zijn in de volgende eenvoudige stellingen uit te drukken.

$$\text{St.: } \alpha \neq \beta \rightarrow \alpha \neq \beta.$$

Bewijs: Uitgeschreven luidt de stelling:

$$\exists_x [\neg A_i \approx B_i] \rightarrow \neg \forall_i [A_i \approx B_i].$$

Onderstellen we $\forall_i [A_i \approx B_i]$, dan geldt, voor ieder willekeurige i , $A_i \approx B_i$. Uit de praemisse $\exists_i [\neg A_i \approx B_i]$ volgt echter, dat we een i kunnen bepalen, waarvoor $\neg A_i \approx B_i$ geldt. De onderstelling $\forall_i [A_i \approx B_i]$ is dus strijdig met de praemisse. Uit $\exists_i [\neg A_i \approx B_i]$ volgt dus $\neg \forall_i [A_i \approx B_i]$

Opmerking: Aangaande de uitspraak $A_i \approx B_i$ hebben we in het bewijs niets ondersteld. We hebben dus voor een willekeurige uitspraak $P(x)$ laten zien, dat geldt:

St.: $\exists_x [\neg P(x)] \rightarrow \neg \forall_x [P(x)]$.

4.8: St.: $\neg \alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Bewijs: De implicatie van links naar rechts luidt uitgeschreven:

$$\neg \exists_i [\neg A_i \approx B_i] \rightarrow \forall_i [A_i \approx B_i]$$

wegens de stabiliteit van $A_i \approx B_i$ (3.6) is dit equivalent met (1) $\neg \exists_i [A_i \not\approx B_i] \rightarrow \forall_i [\neg A_i \not\approx B_i]$.

Onderstel nu, dat voor een zekere i zou gelden $A_i \not\approx B_i$. Dan zou ook gelden $\exists_i [A_i \not\approx B_i]$. Dit zou met de praemisse $\neg \exists_i [A_i \not\approx B_i]$ strijden. Voor iedere i is dus $\neg A_i \not\approx B_i$ uit de praemisse af te leiden. Dus geldt (1) en dus de stelling.

Opmerking: Ook in dit bewijs van (1) is $A_i \not\approx B_i$ door een willekeurige uitspraak te vervangen. Dus hebben we de geldigheid laten zien van:

St.: $\neg \exists_x [P(x)] \rightarrow \forall_x [\neg P(x)]$.

De implicatie van rechts naar links is nog eenvoudiger te bewijzen, evenals de, daaraan beantwoordende, algemene stelling:

St.: $\forall_x [P(x)] \rightarrow \neg \exists_x [\neg P(x)]$.

Als corollarium van de eerste stelling volgt direct:

$$\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \neg \neg \alpha \neq \beta.$$

$$\alpha \neq \beta \Leftrightarrow \neg \neg \exists_i [A_i \not\approx B_i].$$

4.9: Wegens (4.3) $\alpha = \beta = \neg \neg \alpha = \beta$ is stelling 4.8 equivalent met:

St.: $\neg \alpha \neq \beta \Leftrightarrow \neg \alpha \neq \beta$.

Hoewel $\alpha \neq \beta$ een vaak sterkere uitspraak is dan $\neg \alpha \neq \beta$, zijn dus de ontkenningen van deze twee uitspraken equivalent.

4.10: Aan het rationale getal a kunnen we eenduidig het reële getal $\alpha = \{A_i\}$ met voor ieder i : $A_i = (a, a)$ toevoegen.

4.11: De hoofdbewerkingen met de reële getallen [A. Heyting, 1935-1939, V § 3].

Zijn $\alpha = \{A_i\}$ en $\beta = \{B_i\}$ reële getallen, dan definiëren wij:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &\equiv \{A_i + B_i\} \\ -\alpha &\equiv \{-A_i\} \\ \alpha \cdot \beta &\equiv \{A_i \cdot B_i\} \\ \alpha^{-1} &\equiv \{A_i^{-1}\}\end{aligned}$$

A_i^{-1} is alleen een gedefiniëerd interval, zo $0 \notin A_i$. Indien er een getal i te bepalen is, zodat $0 \notin A_i$ [d.w.z. zo $\alpha \neq 0$], dan kunnen wij de eerste $(i-1)$ intervallen uit α weglaten en voor het resulterende reële getal α' (waarvoor geldt $\alpha' = \alpha$) α'^{-1} bepalen.

Zo dus $\alpha \neq 0$ is, heeft de definitie

$$\alpha^{-1} \equiv \alpha'^{-1} = \{A'^{-1}\}$$

betekenis. Wegens deze voorwaarde is de verwijderingsrelatie van groot belang in de theorie van het reële getal.

$$\begin{aligned}\max\{\alpha, \beta\} &\equiv \{\max\{A_i, B_i\}\} \\ \min\{\alpha, \beta\} &\equiv \{\min\{A_i, B_i\}\} \\ |\alpha| &\equiv \{|A_i|\}\end{aligned}$$

Alle rechtersijden vormen nu inkrimpende, convergente intervalrijen en bepalen dus reële getallen. Dat de rijen inkrappend zijn, volgt onmiddellijk uit st. 3.10. De convergentie volgt uit:

$$\begin{aligned}a_{i,2} + b_{i,2} - (a_{i,1} + b_{i,1}) &= (a_{i,2} - a_{i,1}) + (b_{i,2} - b_{i,1}) \\ &= a_{i,2} - a_{i,1} - (-a_{i,2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|a_{i,2}b_{i,2} - a_{i,1}b_{i,1}| &= |(a_{i,2} - a_{i,1})b_{i,2} + \\ &\quad + a_{i,1}(b_{i,2} - b_{i,1})| \leq \\ &\quad (a_{i,2} - a_{i,1})|b_{i,2}| + |a_{i,1}|(b_{i,2} - b_{i,1})\end{aligned}$$

en analoge ongelijkheden bij andere keuze van c_1 en c_2 .

$$a_{i,1}^{-1} - a_{i,2}^{-1} = \frac{a_{i,2} - a_{i,1}}{a_{i,1} a_{i,2}}$$

waarbij, omdat $0 \in (a_{i,1}, a_{i,2})$, $(a_{i,1} - a_{i,2})^{-1}$ beperkt blijft.

$$\max \{a_{i,2}, b_{i,2}\} - \max \{a_{i,1}, b_{i,1}\} \leq (a_{i,2} - a_{i,1}) + (b_{i,2} - b_{i,1}).$$

$$\min \{a_{i,2}, b_{i,2}\} - \min \{a_{i,1}, b_{i,1}\} \leq (a_{i,2} - a_{i,1}) + (b_{i,2} - b_{i,1}).$$

4.12: De substitutie eigenschap van deze bewerkingen t.o.v. de gelijkheid van reële getallen volgt uit de analoge eigenschap van de bewerkingen met intervallen t.o.v. de rakingsrelatie en uit de definitie van de gelijkheid van reële getallen.

4.13: Volgens Dedekind kunnen de reële getallen afgebeeld worden op de sneden in de verzameling der rationale getallen, of ook, indien we slechts de open linker verzamelingen beschouwen, en het getal α dus toevoegen aan de verzameling van alle rationale getallen r met $r < \alpha$, op de open, eigenlijke beginsegmenten hiervan, d.w.z. op de verzamelingen L van rationale getallen, welke voldoen aan:

$$\begin{aligned} \exists_r [r \in L] \\ \exists_r [r \notin L]. \\ r \in L \iff \exists_s [s > r \wedge s \in L]. \end{aligned}$$

Beschouwen wij hierbij alleen de beslisbare beginsegmenten L , d.w.z. die beginsegmenten L , waarvoor ^{bij} ieder rationaal getal r uitgemaakt kan worden, of $r \in L$ of $r \notin L$ is, dan kunnen we niet aan alle reële getallen, welke door interval-schakelingen voortgebracht worden, dergelijke beslisbare beginsegmenten toevoegen.

Beschouwen wij ook de half-beslisbare beginsegmenten, d.w.z. die beginsegmenten L , waarvoor bij ieder paar rationale getallen $r < s$ uitgemaakt kan worden

$$r \in L \vee s \notin L,$$

dan is wel een (1,1)-duidige toevoeging hiervan aan de door interval-schakelingen gedefiniëerde reële getallen mogelijk.

4.14: Een voorbeeld van een reëel getal, dat wel door een interval-schakeling is voort te brengen, maar waarvan we niet kunnen uitmaken, of het groter dan, kleiner dan, of gelijk aan 0 is, (- "dat om 0 zweeft"), en waarvan dus het bijbehorende beginsegment niet beslisbaar kan zijn, wordt als volgt geconstrueerd [L.E.J. Brouwer, 1920].

Schrijf de decimalen van π op 1 4 1 5 9 . . . en bepaal $a_{i,1} = -2^{-i}$ en $a_{i,2} = 2^{-i}$, zolang onder de eerste i decimalen van π geen "rijtje" 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 voorkomt,

en $a_{i,1} = a_{i,2} = (-1)^k 2^{-k}$, indien $i \geq k$ is en k het kleinste getal is, zodat onder de eerste k decimalen van π een dergelijk rijtje voorkomt,

$$\alpha = \{(a_{i,1}, a_{i,2})\}$$

is dan een goed gedefiniëerd reëel getal, dat, indien π geen rijtje bevat, voldoet aan $\alpha = 0$, indien k even is, aan $\alpha > 0$ en, indien k oneven is, aan $\alpha < 0$.

Dergelijke voorbeelden behoren niet tot de eigenlijke intuïtionistische wiskunde. Het zijn slechts waarschuwingen, dat we bepaalde beweringen (hier: $\alpha = 0 \vee \alpha > 0 \vee \alpha < 0$, of ook: $\alpha = 0 \vee \alpha \neq 0$) op grond van onze wiskundige kennis (zolang nog dergelijke onopgeloste problemen bestaan) niet mogen uitspreken.

Wegens het bestaan van deze om 0 zwevende reële getallen, was het ook niet mogelijk de definitie van de hoofdbewerkingen eerst alleen voor de niet negatieve getallen te formuleren, (wat voor $\alpha \cdot \beta$ eenvoudiger zou zijn) en dan tot de negatieve getallen uit te breiden.

De relatie $\alpha = 0$ is dus niet beslisbaar. $\alpha = 0$ is dus een voorbeeld van een wel stabiele, maar niet beslisbare uitspraak (3.6).

4.15: St.: Iedere rekenregel (door een vergelijking uitgedrukte identieke gelijkheid), welke voor variabele en zekere constante rationale getallen $c_1, \dots, c_m$ geldt, geldt ook voor variabele reële getallen en de aan $c_1, \dots, c_m$ toegevoegde constante reële getallen $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ (met $\gamma_j = \{c_{ji}\}$ en $c_{ji} = (c_j, c_j)$), indien voor ieder reëel getal ξ , waardoor gedeeld wordt, geldt $\xi \neq 0$.

Bewijs: Zij de rekenregel voor de rationale getallen:

$$F(a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_m) = G(a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_m)$$

en die voor de reële getallen:

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m) = G(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m).$$

In de opbouw van F en G wordt slechts een eindig aantal malen door een reëel getal ($\xi_1, \dots, \xi_s$ met $\xi_k = \{x_{k,i}\}$) gedeeld. Voor ieder van deze ξ_k geldt $\xi_k \neq 0$. Dus bij ieder k te bepalen een index $i(k)$ zodat

$$0 \notin x_{k,i(k)}.$$

Stel nu $i = \bar{j} \max(i(1), \dots, i(s))$. Dan kunnen we 3.12 toepassen en geldt voor alle j met $j \geq i$:

$$F(a_{1j}, \dots, a_{nj}, c_1, \dots, c_m) \approx G(a_{1j}, \dots, a_{nj}, c_1, \dots, c_m).$$

Uit de gelijkheidsdefinitie voor reële getallen volgt dan:

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m) = G(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m).$$

4.16: Een eerste verschil tussen de klassieke eigenschappen van de reële getallen en hun intuïtionistische analoga treedt op, wanneer we formules beschouwen, welke uit meer dan één vergelijking door middel van de logische voegtekens zijn opgebouwd.

Een voorbeeld hiervoor is het volgende: klassiek geldt

$$\alpha = 0 \vee \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha \beta = 0;$$

intuitionistisch geldt echter alleen

$$\alpha = 0 \vee \beta = 0 \rightarrow \alpha \beta = 0.$$

De omgekeerde implicatie mogen we niet affirmeren, omdat het intuïtionistisch "of" zo sterk geïnterpreteerd wordt. Indien bekend is, dat $\alpha \beta = 0$ is, hoeft het nog niet mogelijk te zijn uit te maken, welke van de uitspraken $\alpha = 0$ of $\beta = 0$ waar is.

4.17: Een tegenvoorbeeld wordt geleverd door de als volgt gedefiniëerde reële getallen $\alpha = \{A_n\}$ en $\beta = \{B_n\}$.

Voor ieder n is tussen de twee mogelijkheden I en II te beslissen.

I: onder de eerste n decimalen van Π is geen "rijtje" ("0 1 2 3 4 5 6 7 8 9").

II: onder de eerste n decimalen van Π is wel een "rijtje".

In dit laatste geval, II, is het rangnummer k van de "9" in het eerste "rijtje" van Π te bepalen en dus weer te beslissen tussen:

II a: k is even,

II b: k is oneven.

Wij definiëren nu voor ieder n :

$$\begin{aligned} A_n &= (0, 2^{-n}) && \text{in geval I.} \\ &= (0, 0) && \text{" " II a.} \\ &= (2^{-k}, 2^{-k}) && \text{" " II b.} \\ B_n &= (0, 2^{-n}) && \text{" " I.} \\ &= (2^{-k}, 2^{-k}) && \text{" " II a.} \\ &= (0, 0) && \text{" " II b.} \end{aligned}$$

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$\begin{aligned} A_n B_n &= (0, 2^{-2n}) && \text{in geval I.} \\ &= (0, 0) && \text{" " II.} \end{aligned}$$

Dus in ieder geval geldt:

$$A_n B_n \approx 0 \text{ en dus } \alpha \beta = 0.$$

$\alpha = 0$ mogen we pas affirmieren, als we weten, dat k zeker niet oneven is, $\beta = 0$ pas, als we weten, dat k niet even is. Geen van beide uitspraken is dus te bevestigen voor we meer weten over de decimalen van π .

4.18: Wel golden:

$$\begin{aligned} \alpha \beta = 0 &\rightarrow (\alpha \neq 0 \rightarrow \beta = 0) \text{ en} \\ \alpha \beta = 0 &\rightarrow \neg (\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0) \\ &(\text{zwakke interpretaties van "of"}). \end{aligned}$$

Deze betrekkingen worden in 4.21 afgeleid.

4.19: Eigenschappen van de verwijderingsrelatie van reële getallen.

Def.: $\alpha \# \beta \stackrel{\text{D}}{=} \exists_n [A_n \approx B_n]$ (4.6).

Vanzelf geldt, wegens het inkrimpen van de intervallen, welke een reëel getal definiëren:

$$A_n \approx B_n \wedge m \geq n \rightarrow A_m \approx B_m.$$

De hoofdeigenschappen van de verwijderingsrelatie zijn vervat in de volgende drie stellingen:

$$\text{St.: } \alpha \# \beta \rightarrow \beta \# \alpha.$$

$$\text{St.: } \neg \alpha \# \beta \rightarrow \alpha = \beta. \quad (4.8)$$

$$\text{St.: } \alpha \# \beta \rightarrow \forall_\gamma [\alpha \# \gamma \vee \beta \# \gamma].$$

Bewijs: Kies een index n , zodat $A_n \approx B_n$. Stel $A_n < B_n$ ($B_n < A_n$ analoog), d.w.z.: $a_{n2} < b_{n1}$. Dus te vinden een rationaal getal d , zodat: $b_{n1} - a_{n2} > d > 0$.

Bepaal een index p , zodat $p \geq n$ en $c_{p2} - c_{p1} < d$ is.

Dan is direct te zien, dat $C_p \approx A_p \vee C_p \approx B_p$ is.

Dus geldt $\alpha \# \gamma \vee \beta \# \gamma$.

Een relatie (ook tussen andere entiteiten dan reële getallen), welke aan deze drie uitspraken voldoet, noemen we altijd een verwijderingsrelatie.

De substitutie eigenschap van de verwijderingsrelatie:

$$\text{St.: } \alpha \# \beta \wedge \beta = \gamma \rightarrow \alpha \# \gamma$$

volgt onmiddellijk uit:

$$\alpha \# \beta \rightarrow \forall_\gamma [\alpha \# \gamma \vee \beta \# \gamma].$$

4.20: De verwijderingsrelatie is invariant t.o.v. optelling en t.o.v. vermenigvuldiging met een getal, verwijderd van 0.

$$\text{St.: } \alpha \# \beta \rightarrow \alpha + \gamma \# \beta + \gamma$$

Bewijs: Zij $\alpha \# \beta$. Dus te vinden een index n , zodat $A_n \approx B_n$. Stel $A_n < B_n$ ($A_n > B_n$ analoog). Dus is een rationaal getal d te vinden, zodat $b_{n1} - a_{n2} > d > 0$ is.

Bepaal weer een index p , zodat $p \geq n$ en $c_{p2} - c_{p1} < d$ is.
 Dan is direct te zien, dat

$b_{p1} + c_{p1} > a_{p2} + d + c_{p1} > a_{p2} + c_{p2}$ is. Dus is

$A_p + C_p < B_p + C_p$, en dus $\alpha + \gamma \neq \beta + \gamma$.

St.: $\alpha \neq \beta \wedge \gamma \neq 0 \rightarrow \alpha\gamma \neq \beta\gamma$.

Het bewijs wordt gegeven via het speciale geval:

St.: $\alpha \neq 0 \wedge \gamma \neq 0 \rightarrow \alpha\gamma \neq 0$.

Bewijs hiervan: Zij $\alpha \neq 0$ en $\gamma \neq 0$. Dan te vinden een index n zodat: $0 \in A_n$ en $0 \notin C_n$. Uit (3.10) volgt dan $0 \notin A_n C_n$ uit het ongerijmde.

Ook de omgekeerde implicatie

St.: $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \leftarrow \alpha\beta \neq 0$ is met (3.10) te bewijzen.

De algemene stelling is nu tot het bijzondere geval terug te brengen d.m.v.: $\alpha - \beta \neq 0 \wedge \gamma \neq 0 \rightarrow \alpha\gamma - \beta\gamma \neq 0$.

4.21: St.: $\alpha + \beta \neq 0 \rightarrow \alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$.

Bewijs: Zij $\alpha + \beta \neq 0$. Dan te vinden een index n , zodat $0 \in A_n + B_n$. Stel $0 < A_n + B_n$ ($A_n + B_n < 0$ analoog).

Dus is $0 < a_{n1} + b_{n1}$, dus ook $a_{n1} > 0 \vee b_{n1} > 0$.

Dus is $\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$.

Boven hebben we reeds bewezen:

St.: $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \leftrightarrow \alpha\beta \neq 0$.

Hieruit volgt (export van praemisse $\alpha \neq 0$)

$\alpha \neq 0 \rightarrow (\beta \neq 0 \rightarrow \alpha\beta \neq 0)$ en daaruit weer (contrapositie van $\beta \neq 0 \rightarrow \alpha\beta \neq 0$)

$\alpha \neq 0 \rightarrow (\neg \alpha\beta \neq 0 \rightarrow \neg \beta \neq 0)$ of:

$\alpha \neq 0 \rightarrow (\alpha\beta = 0 \rightarrow \beta = 0)$.

Uit de laatste formule volgt (import van $\alpha \neq 0$)

$\alpha \neq 0 \wedge \alpha\beta = 0 \rightarrow \beta = 0$ en dus:

St.: $\alpha\beta = 0 \wedge \alpha \neq 0 \rightarrow \beta = 0$ en daaruit volgt weer op dezelfde wijze:

St.: $\alpha\beta = 0 \wedge \beta \neq 0 \rightarrow \alpha = 0$. Uit deze laatste weer:

St.: $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \rightarrow \alpha\beta \neq 0$ en hieruit weer door contrapositie:

St.: $\alpha\beta = 0 \rightarrow \neg(\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0)$.

Tegen de sterkere stelling:

$\alpha\beta = 0 \rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$ hebben we reeds een tegenvoorbeeld aangevoerd.

4.22: Voor de theorie van de veeltermen zijn nog de volgende stellingen over de verwijderingsrelatie van belang:

St.: $\alpha\beta \neq \gamma \delta \rightarrow \alpha \neq \gamma \vee \beta \neq \delta$.

Bewijs: $0 \neq \alpha\beta - \gamma\delta = \alpha\beta - \alpha\delta + \alpha\delta - \gamma\delta =$
 $= \alpha(\beta - \delta) + (\alpha - \gamma)\delta.$
Dus (4.21): $\alpha(\beta - \delta) \neq 0 \vee (\alpha - \gamma)\delta \neq 0.$
Dus (4.20): $(\beta - \delta) \neq 0 \vee (\alpha - \gamma) \neq 0.$
Dus : $\alpha \neq \gamma \vee \beta \neq \delta.$

4.23: St.: Zij $F(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \bar{D}$

$$\bar{D} \sum_{p_1, \dots, p_n} \alpha_{p_1, \dots, p_n} \xi_1^{p_1} \dots \xi_n^{p_n}$$

een veelterm en $F(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \neq F(\delta_1, \dots, \delta_n)$ dan is er een index i te vinden, zodat $\gamma_i \neq \delta_i$ geldt.

Bewijs: $F(\gamma_1, \dots, \gamma_n) - F(\delta_1, \dots, \delta_n) \neq 0.$

Dus: $\sum_{p_1, \dots, p_n} \alpha_{p_1, \dots, p_n} (\gamma_1^{p_1} \dots \gamma_n^{p_n} - \delta_1^{p_1} \dots \delta_n^{p_n}) \neq 0.$

Dus is minstens één van de termen verwijderd van 0 (4.21):

$$\alpha_{p_1, \dots, p_n} (\gamma_1^{p_1} \dots \gamma_n^{p_n} - \delta_1^{p_1} \dots \delta_n^{p_n}) \neq 0.$$

Dus is (4.20): $\gamma_1^{p_1} \dots \gamma_n^{p_n} - \delta_1^{p_1} \dots \delta_n^{p_n} \neq 0.$

Dus is (4.21): $\gamma_1 \neq \delta_1 \vee \gamma_1^{p_1-1} \dots \gamma_n^{p_n} \neq \delta_1^{p_1-1} \dots \delta_n^{p_n}.$

Op dezelfde wijze doorgaand volgt hieruit

$$\gamma_1 \neq \delta_1 \vee \gamma_2 \neq \delta_2 \vee \dots \vee \gamma_n \neq \delta_n.$$

4.24: Tegenvoorbeelden worden - als ook in (4.17) het geval was - dikwijls gegeven d.m.v. reële getallen, waarvan niet bekend is, of zij groter dan, kleiner dan, of gelijk aan een gegeven rationaal getal r zijn - getallen, welke "om r zweven".

Een poging om deze complicaties te vermijden door alleen "nette" getallen toe te laten, d.w.z. getallen α , waarvoor bij ieder rationaal getal uit te maken is, of $\alpha < r$, $\alpha = r$, dan wel $\alpha > r$ geldt, (getallen met beslisbare sneden van Dedekind), mislukt, omdat de verzameling van deze nette getallen niet afgesloten is t.o.v. de hoofdbewerkingen. Wel zijn vele getallen, welke in de analyse voorkomen, "net".

4.25: Een voorbeeld van een net getal is het getal

$$e \in \bar{D} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Het bewijs hiervoor volgt het gewone bewijs voor de irrationaliteit van e vrijwel op de voet.

Onderstel $e = \frac{m}{n}$, waarbij m en n natuurlijke getallen zijn.

Zeker geldt $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = s_n + \theta_n.$

Hierbij geldt:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{k!} < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^i = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n \cdot n!} . \end{aligned}$$

Dus is $n!e - n!s_n = (n-1)!m - n!s_n = n!\varphi_n < \frac{1}{n}$. Maar het linkerlid is geheel en niet $= 0$. Dus is uit $e = \frac{m}{n}$ een contradictie afgeleid. Dus geldt $e \neq \frac{m}{n}$.

Om de sterkere uitspraak $e \neq \frac{m}{n}$ te bewijzen moeten we $|e - \frac{m}{n}|$ naar beneden schatten.

We hadden: $\frac{1}{(n+1)!} < \varphi_n = e - s_n < \frac{1}{n \cdot n!}$ dus

$\frac{1}{n+1} < n!e - n!s_n < \frac{1}{n}$; maar $n!\frac{m}{n}$ en $n!s_n$ zijn geheel, dus

$$n!|e - \frac{m}{n}| = n!|e - s_n + s_n - \frac{m}{n}| > \frac{1}{n+1}.$$

dus $|e - \frac{m}{n}| > \frac{1}{(n+1)!}$, dus $e \neq \frac{m}{n}$. Dus is e "net".

Ook de getallentheorie prefereert deze stelling: " e is positief irrationaal" boven " e is niet rationaal". Zij geeft meer "informatie" [Goodstein, 1946].

4.26: Ook van de algebraïsche getallen is op een eenvoudige wijze aan te tonen, dat het "nette" getallen zijn [Brouwer, 1920]. Hiertoe bewijzen wij de

St.: Twee wortels van een algebraïsche vergelijking met rationale coëfficiënten zijn of gelijk, of er is een positieve benedengrens voor hun verschil aan te geven.

Bewijs: Zij de gegeven vergelijking

$$f(\xi) = \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

De discriminant d van deze vergelijking is een rationale functie van de coëfficiënten en dus een rationaal getal. Indien $d = 0$ is, heeft $f(\xi) = 0$ een meervoudige wortel. Dan is de graad van de grootste gemene deler

$$g(\xi) = \text{G.G.D.}(f(\xi), f'(\xi))$$

zeker > 0 , en kunnen we $f(\xi)$ door $g(\xi)$ delen.

De resulterende vergelijking $f^*(\xi) = 0$ heeft dan een discriminant d met $d \neq 0$, dus $d \neq 0$.

Noem nu de wortels van $f^*(\xi) = 0$ resp. $\omega_1, \dots, \omega_m$.

Dan geldt:

$$d = \prod_{i < k} (\omega_i - \omega_k)^2.$$

We willen nu bewijzen: $\omega_1 - \omega_2 \neq 0$.

Het is gemakkelijk een rationaal getal h te vinden, zodat geldt:

$$|\omega_i - \omega_k| \leq h \text{ voor alle } i, k = 1, \dots, n.$$

$$\text{Maar } |\omega_1 - \omega_2|^2 = \prod_{i < k} \frac{|d|}{|\omega_i - \omega_k|^2} \geq \frac{|d|}{h^{n^2 - n - 2}}.$$

Dus $\omega_1 \neq \omega_2$. $\prod_{i < k} |\omega_i - \omega_k|^2$ ontstaat hierbij uit

$\prod_{i < k} |\omega_i - \omega_k|^2$ door $|\omega_1 - \omega_2|^2$ weg te laten.

Gaan we nu uit van twee willekeurige algebraïsche getallen

α_1 (wortel van $f_1(\xi) = 0$) en α_2 (wortel van $f_2(\xi) = 0$),
dan zijn beide wortels van $f_1(\xi) \cdot f_2(\xi) = 0$, en dus is
volgens de vorige stelling uit te maken of $\alpha_1 = \alpha_2$ of
 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ is.

Nemen we nu voor α_2 een rationaal getal, dan hebben
wij a fortiori aangetoond, dat alle algebraïsche getallen
"net" zijn.

Nog van vele andere getallen is bewezen, dat zij posi-
tief irrationaal, of zelfs, dat zij positief transcendent
zijn. Al deze getallen zijn natuurlijk "net".

4.27: Aangaande de constante van Euler γ , gedefiniëerd

$$\text{door: } \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lg n - 1 - 1/2 - 1/3 - \dots - 1/n)$$

is het onbekend of deze rationaal is of niet. Ook de "net-
heid" van γ is nog niet bewezen.

Ergen is het, dat we niet kunnen bewijzen, dat geldt:

$$\alpha \text{ "net" } \wedge \beta \text{ "net" } \rightarrow \alpha + \beta \text{ "net" }.$$

Een tegenvoorbeeld hiertegen wordt geleverd door:

$$\alpha = -e$$

$\beta = e$, waarbij echter de rij van de decimalen beëindigd
wordt na de 9 van het eerste "rijtje", dat daarin optreedt,
of na de 0 van het eerste "omgekeerde rijtje"
"9876543210", met dien verstande, dat in dit laatste geval
deze 0 bovendien in een 1 veranderd wordt.

Zowel α als β zijn net, $\alpha + \beta$ echter zweeft om 0.

4.28: De ordening van de reële getallen ($\alpha = \{A_n\}$ en
 $\beta = \{B_n\}$) gedefiniëerd door:

$$\alpha < \beta \iff \exists_n [A_n < B_n].$$

is een sterke, positieve orde-relatie, geheel analoog aan
de verwijderingsrelatie, waarmee zij dan ook verbonden is
door de

$$\text{St.: } \alpha \neq \beta \iff \alpha > \beta \vee \alpha < \beta.$$

Onmiddellijk te bewijzen is ook de zwakkere

$$\begin{aligned} \text{St.: } \alpha > \beta &\rightarrow \alpha \neq \beta \quad \wedge \quad \alpha \not< \beta \\ \alpha = \beta &\rightarrow \alpha \not> \beta \quad \wedge \quad \alpha \not< \beta \\ \alpha < \beta &\rightarrow \alpha \neq \beta \quad \wedge \quad \alpha \not> \beta. \end{aligned}$$

De sterkere stelling $\alpha = \beta \vee \alpha < \beta \vee \alpha > \beta$ geldt echter niet. Ieder om 0 zwevend getal levert een tegen-voorbeeld. Wel geldt:

$$\text{St.: } \alpha \not> \beta \quad \wedge \quad \alpha \not< \beta \rightarrow \neg \alpha \neq \beta. \quad \text{en dus:}$$

$$\text{St.: } \alpha \not> \beta \quad \wedge \quad \alpha \not< \beta \rightarrow \alpha = \beta.$$

$$\text{maar niet: } \alpha \neq \beta \quad \wedge \quad \alpha \not< \beta \rightarrow \alpha > \beta.$$

Uit de twee negatieve praemissen is geen berekeningswijze voor de index n af te leiden.

De substitutie-eigenschappen van deze ordening t.o.v. de gelijkheidsrelatie:

$$\begin{aligned} \text{St.: } \alpha < \beta \quad \wedge \quad \beta = \gamma &\rightarrow \alpha < \gamma. \\ \alpha < \beta \quad \wedge \quad \alpha = \gamma &\rightarrow \gamma < \beta. \end{aligned}$$

worden door hetzelfde bewijs gegarandeerd als datgene, wat, tweemaal toegepast, deze zelfde eigenschap voor de verwijderingsrelatie leverde.

De transitiviteit van de ordening volgt onmiddellijk uit de inkringingseis voor de reële getallen en de transitiviteit van de intervalordening.

$$\text{St.: } \alpha < \beta \quad \wedge \quad \beta < \gamma \rightarrow \alpha < \gamma.$$

Evenals de analoge stelling voor de verwijderingsrelatie, geldt ook voor deze ordening:

$$\text{St.: } \alpha > \beta \rightarrow \forall \gamma [\alpha > \gamma \vee \gamma > \beta].$$

Deze eigenschap wordt weer op geheel dezelfde wijze aangetoond.

4.29: Een orderrelatie $x < y$, ook indien zij in een andere verzameling dan die van de reële getallen gedefiniëerd is, noemen we een pseudo-ordening [Heyting, 1925, pag. 56], wanneer zij, zoals de besproken sterke ordening der reële getallen, voldoet aan:

- I: $x < y \rightarrow x \neq y \quad \wedge \quad x \not> y.$
 $x = y \rightarrow x \not< y \quad \wedge \quad x \not> y.$
 $x > y \rightarrow x \not< y \quad \wedge \quad x \neq y.$
- II: $x < y \quad \wedge \quad x = x' \quad \wedge \quad y = y' \rightarrow x' < y'.$
- III: $x < y \quad \wedge \quad y < z \rightarrow x < z.$
- IV: $x \not< y \quad \wedge \quad x \not> y \rightarrow x = y.$
- V: $x < y \rightarrow \bigvee_z [x < z \vee z < y].$

4.30: Evenals de verwijderingsrelatie is ook deze pseudo-ordening van de reële getallen invariant t.o.v. optellen en t.o.v. vermenigvuldigen met een getal $\gamma > 0$.

St.: $\alpha > \beta \rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
 $\alpha > \beta \wedge \gamma > 0 \rightarrow \alpha \gamma > \beta \gamma$

Ook dit wordt op dezelfde wijze aangetoond.

4.31: Het analogon van de klassieke relatie $\alpha \leq \beta$ is intuïtionistisch: $\alpha \geq \beta$.

De mogelijkheid om te beslissen:

$$\alpha \geq \beta \rightarrow \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$$

bestaat echter niet in het algemeen.

Uit $\alpha \geq \beta \rightarrow (\alpha > \beta) \rightarrow \exists_n [A_n > B_n]$ volgt onmiddellijk

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \forall_n [A_n \not> B_n].$$

4.32: Hoewel we niet van ieder paar gegeven reële getallen α en β , kunnen uitmaken, welk van beide het grootste, respectievelijk het kleinste is, kunnen we toch, als in (4.11), definiëren:

$$\begin{aligned} \max \{ \alpha, \beta \} &\equiv \{ \max \{ A_n, B_n \} \} \\ &\equiv \{ (\max \{ a_{n1}, b_{n1} \}, \max \{ a_{n2}, b_{n2} \}) \} \\ \min \{ \alpha, \beta \} &\equiv \{ \min \{ A_n, B_n \} \} \\ &\equiv \{ (\min \{ a_{n1}, b_{n1} \}, \min \{ a_{n2}, b_{n2} \}) \}. \end{aligned}$$

Hiervoor geldt zeker:

St.: $\max \{ \alpha, \beta \} \neq \alpha$,
 $\max \{ \alpha, \beta \} \neq \beta$.

Bewijs: Onderstel $\max \{ \alpha, \beta \} < \alpha$. Dan te vinden een index n zodat: $\max \{ A_n, B_n \} < A_n$
en dus: $\max \{ a_{n2}, b_{n2} \} < a_{n1} < a_{n2}$ is.

Maar dit is contradictoir.

Ook geldt:

St.: $\neg (\max \{ \alpha, \beta \} > \alpha \wedge \max \{ \alpha, \beta \} > \beta)$.

Bewijs: Onderstel: $\max \{ \alpha, \beta \} > \alpha$ en $\max \{ \alpha, \beta \} > \beta$. Dan te vinden een index n , zodat:
 $\max \{ A_n, B_n \} > A_n$ en $\max \{ A_n, B_n \} > B_n$, dus, zodat zowel:
 $\max \{ a_{n1}, b_{n1} \} > a_{n2} > a_{n1}$, als
 $\max \{ a_{n1}, b_{n1} \} > b_{n2} > b_{n1}$ is.

Maar dit is weer contradictoir.

Analoog geldt natuurlijk:

St.: $\min \{ \alpha, \beta \} \geq \alpha$.
 $\min \{ \alpha, \beta \} \geq \beta$.

$\neg (\min \{ \alpha, \beta \} < \alpha \wedge \min \{ \alpha, \beta \} < \beta)$, en ook:

St.: $\alpha < \beta \rightarrow \min \{ \alpha, \beta \} = \alpha \wedge \max \{ \alpha, \beta \} = \beta$.

4.33: De in (4.11) gedefiniëerde absolute waarde:

$$|\alpha| \stackrel{\text{D}}{=} \{ |A_n| \} \stackrel{\text{D}}{=} \{ \max \{ A_n, -A_n, 0 \} \} \stackrel{\text{D}}{=} \{ (\max \{ a_{n1}, -a_{n2}, 0 \}, \max \{ a_{n2}, -a_{n1}, 0 \}) \} .$$

heeft de gewone eigenschappen van de absolute waarde.

Voor ieder n geldt:

$$\begin{aligned} (\max \{ a_{n1}, -a_{n2}, 0 \}, \max \{ a_{n2}, -a_{n1}, 0 \}) &\approx \\ &\approx (\max \{ a_{n1}, -a_{n2} \}, \max \{ a_{n2}, -a_{n1} \}) . \end{aligned}$$

Dus is bewezen:

St.: $|\alpha| = \max \{ \alpha, -\alpha \}$. Verder geldt

St.: $|\alpha| \neq 0$.

St.: $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ (uit 4.15).

St.: $|\alpha + \beta| \geq |\alpha| + |\beta|$ (uit 3.13).

3.34: Intervallen in de verzameling der reële getallen

kunnen op verschillende wijzen worden gedefiniëerd.

Indien bekend is, dat $\alpha < \beta$ geldt, kunnen we een open, resp. gesloten interval bepalen door:

$$\begin{aligned} \xi \in (\alpha, \beta) &\stackrel{\text{D}}{=} \alpha < \xi < \beta . \\ \xi \in [\alpha, \beta] &\stackrel{\text{D}}{=} \alpha \leq \xi \leq \beta . \end{aligned}$$

Is de orderrelatie tussen α en β onbekend, dan kunnen we nog definiëren:

$$\begin{aligned} \xi \in [\alpha, \beta] &\stackrel{\text{D}}{=} \neg (\xi < \alpha \wedge \xi < \beta) \wedge \\ &\wedge \neg (\xi > \alpha \wedge \xi > \beta) . \end{aligned}$$

Deze laatste bepaling stemt, indien $\alpha < \beta$ is, met de erboven staande definitie overeen.

St.: $\gamma = \min \{ \alpha, \beta \} \wedge \delta = \max \{ \alpha, \beta \} \rightarrow$
 $\rightarrow (\xi \in [\alpha, \beta] \iff \xi \in [\gamma, \delta]) .$

Bewijs: Indirect.

Onderstel $\xi > \alpha$ en $\xi > \beta$, dan $\xi > \gamma$ en $\xi > \delta$.

Dus $\xi \in [\gamma, \delta] \rightarrow \xi \in [\alpha, \beta]$.

Onderstel $\xi > \delta$, dan $\xi > \alpha$ en $\xi > \beta$.

Dus $\xi \in [\alpha, \beta] \rightarrow \xi \in [\gamma, \delta]$.

Naast het boven gedefiniëerde "sterke" open interval (α, β) , kunnen we ook een "zwak" open interval bepalen door:

$$\xi \in \{\alpha, \beta\} \stackrel{\text{D}}{=} \xi \in [\alpha, \beta] \wedge \xi \neq \alpha \wedge \xi \neq \beta .$$

4.35: Tot nu toe dachten wij ons de rij intervallen $\{A_n\}$, welke een reëel getal α definiëerde, gegeven door een wet, die het mogelijk moest maken, a_{n1} en a_{n2} te berekenen voor ieder index n .

De verzameling van alle eindige tekenrijen, welke in een taal met eindig veel tekens (of woorden), op te schrijven

zijn, is echter aftelbaar, en de verzameling van de opschrijf-bare wetten moet daar een deelverzameling van zijn. Dit doet ons vermoeden, dat we, door alleen deze door een wet gedefiniëerde reële getallen te erkennen, niet het gehele continuüm uitputten.

Naast deze, door een wet gedefiniëerde, voeren we daarom nieuwe reële getallen in, waarvan het n^{de} interval vrij gekozen mag worden uit een zekere verzameling van intervallen, welke zelf door een wet en door de vooraf gaande $(n-1)$ keuzen bepaald is. Een dergelijke rij intervallen noemen we een keuzerij van intervallen [Brouwer, 1918-1919; 1924].

(De oude door een wet gedefiniëerde reële getallen krijgen we hierbij terug, indien voor ieder n de verzameling van intervallen, waaruit de keuze gemaakt kan worden, precies één element bevat.)

Steeds moeten de wetten, die de keuze-vrijheid bepalen, zo geformuleerd zijn, dat we een reëel getal krijgen, dwz. dat altijd een volgend interval in het vorige bevat is, en dat de rij intervallen convergeert. Om dit laatste te bereiken, kan bijvoorbeeld geëist worden, dat ieder volgend interval een lengte heeft, hoogstens gelijk aan de helft van de lengte van het vorige interval. Hebben we namelijk eens een reëel getal α gegeven, dan kunnen we door weglaten van intervallen altijd een intervalrij hiervoor vinden, zodanig dat de intervallengten ervan willekeurig snel naar nul convergeren.

Omdat bij de gedefiniëerde bewerkingen met reële getallen steeds het n^{de} interval van het gezochte getal bepaald wordt met behulp van de n^{de} intervallen van de gegeven getallen, kunnen deze bewerkingen even goed met de door keuzerijen gedefiniëerde reële getallen uitgevoerd worden. De resultaten zijn dan weer dergelijke getallen.

4.36: Om het volgende tegenvoorbeeld te kunnen construeren moeten we gebruik maken van de, ook op zich belangrijke, St.: Een inkrimpemde, convergente rij afgesloten intervallen met reële eindpunten bepaalt één en slechts één reëel getal, dat in alle intervallen bevat is.

Bewijs: Noem de reële intervalrij $\{[\gamma_i, \delta_i]\}$, met $\gamma_i = (c_{ij1}, c_{ij2})$ en $\delta_i = (d_{ij1}, d_{ij2})$. Schrap zoveel intervallen hiervan en benaderende rationale intervallen voor γ_i en δ_i , dat voor alle i geldt:

$$|\delta_i - \gamma_i| < 2^{-i}$$

$$c_{ij2} - c_{ij1} < 2^{-i} \quad \text{voor alle } j.$$

$$d_{ij2} - d_{ij1} < 2^{-i} \quad \text{voor alle } j.$$

De rationale intervalrij

$$(c_{ii1}, d_{ii2})$$

bepaalt dan het gezochte reële getal. Dit getal kunnen we nu ook voorstellen door $[\gamma_i, \delta_i]$.

4.37: Het blijkt nu niet mogelijk te zijn, het gehele continuüm, of ook een interval hiervan - bijv. $C_{\mathbb{D}} [0, 1]$ -, zo in twee niet lege, disjuncte deelverzamelingen A en B te verdelen, dat voor ieder $\xi \in C$ uit te maken is of $\xi \in A$ of $\xi \in B$ is. Het is deze laatste, intuïtionistisch zo sterk te interpreteren eis, welke het ons mogelijk maakt een "tegenvoorbeeld" te construeren [Brouwer; 1926, pag. 62].

Onderstel n.l., dat $\alpha_1 \in A$ en $\beta_1 \in B$ is. Dan kunnen we, als we reeds $\alpha_i \in A$ en $\beta_i \in B$ gedefiniëerd hebben, vormen $\gamma_i = (\alpha_i + \beta_i)/2$, en bepalen, wat geldt, of $\gamma_i \in A$ of $\gamma_i \in B$. Indien het eerste het geval is, definiëren we: $\alpha_{i+1} = \gamma_i, \beta_{i+1} = \beta_i$. in het tweede geval: $\alpha_{i+1} = \alpha_i, \beta_{i+1} = \gamma_i$. Voor alle i geldt dan: $\alpha_i \in A$ en $\beta_i \in B$. en $|\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}| = \frac{1}{2} |\alpha_i - \beta_i|$.

Zij nu $\delta = \{[\alpha_n, \beta_n]\}$ (4.36) en bijvoorbeeld $\delta \in A$. We definiëren nu $\delta^* = \{\Delta_n^*\}$ met $\Delta_n^* = [\alpha_n, \beta_n]$, indien onder de eerste n decimalen van Π geen "rijtje" voorkomt, $\alpha_n = [\beta_k, \beta_k]$, indien onder de eerste n decimalen van Π wel een rijtje voorkomt, en k het rangnummer is van de 9 uit het eerste rijtje.

Dan geldt:

$$\delta^* \in A \iff \text{"er komt geen rijtje in } \Pi \text{ voor"}$$

$$\delta^* \in B \iff \text{"er komt een rijtje in } \Pi \text{ voor"}$$

Over het zo gedefiniëerde getal δ^* kunnen we dus niet beslissen of het tot B of tot A behoort, voor we weten of in Π een rijtje voorkomt of niet.

De mogelijkheid om een verdeling van C aan te geven, die de vereiste eigenschappen heeft, impliceert dus de mogelijkheid om alle problemen van het type "komt er in Π een rijtje voor?" op te lossen.

§ 5 : Lineaire Algebra . ')

5.1: Zijn gegeven n lineaire vergelijkingen met n onbekenden $x_1, \dots, x_n$ in de vorm:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i \quad \text{voor } i = 1, \dots, n,$$

waarvan de coëfficiëntendeterminant van 0 verwijderd is,

$$d = \det (a_{ik}) \neq 0,$$

dan kunnen de onbekenden, evenals in de klassieke wiskunde,

berekend worden met de regel van Cramer,

$$x_k = \frac{d_k}{d},$$

waarbij d_k de determinant is van de matrix, die ontstaat door in de matrix (a_{ik}) de k^{de} kolom door de kolom van de bekende termen b_i te vervangen.

Een ietwat abstractere behandeling van het onderwerp van deze paragraaf is te vinden in [Heyting; 1941, § 2].

5.2: Ook is er in dit geval slechts één oplossing, en geldt dus:

$$\text{St. I: } \forall_i \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} p_k = b_i \right] \rightarrow \forall_k \left[p_k = \frac{d_k}{d} \right].$$

Deze stelling kan bovendien na contrapositie (4.21) intuitionistisch positief geformuleerd worden, door zowel antecedens als succedens te verscherpen.

Verscherpte eenduidigheidsstelling:

$$\text{St. II: } \exists_{k=1}^n \left[p_k \neq \frac{d_k}{d} \right] \rightarrow \exists_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} p_k \neq b_i \right].$$

$$\text{Bewijs: } \text{Zij } \exists_{k=1}^n \left[p_k \neq \frac{d_k}{d} \right].$$

Stel : $m_{ik} = \frac{1}{d}$ minor van a_{ik} in de matrix (a_{ik}) .

$$\text{Dan geldt: } \sum_{i=1}^n m_{i1} \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = dx_1.$$

$$\text{dus: } \exists_1 \left[\sum_{i=1}^n m_{i1} \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k = dp_1 \neq d_1 = \sum_{i=1}^n m_{i1} b_i \right].$$

$$\text{dus: } \exists_1 \left[\sum_{i=1}^n m_{i1} \left\{ \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k - b_i \right\} \neq 0 \right].$$

$$\text{dus: } \exists_{1,i} \left[m_{i1} \left\{ \sum_{k=1}^n a_{ik} p_k - b_i \right\} \neq 0 \right], \text{ wegens (4.21)}$$

$$\text{dus: } \exists_i \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} p_k - b_i \neq 0 \right]. \text{ wegens (4.20).}$$

') De conventie, dat reële getallen steeds door Griekse letters worden voorgesteld, wordt niet verder gevolgd.

5.3: De theorie aangaande p vergelijkingen met n onbekenden is, evenals in de klassieke wiskunde, te formuleren rond het begrip: "rang van een matrix". De intuïtionistisch verscherpte definitie hiervan is:

Den matrix heeft de rang r , indien minstens één ^{onder/}determinant van r rijen en r kolommen daaruit van 0 verwijderd is, terwijl alle onderdeterminanten van $r+1$ rijen en kolommen aan 0 gelijk zijn.

Het voorbeeld van een uit één, om 0 zwevend, getal a bestaande matrix, waarschuwt, dat het niet steeds mogelijk behoeft te zijn, de rang van een gegeven matrix te bepalen.

5.4: Indien van de gegeven p vergelijkingen met n onbekenden:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i, \quad \text{voor } i = 1, \dots, p,$$

welke met gebruik van de afkorting $L_i(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ te schrijven zijn als $L_i(x) = b_i$, de rang r bekend is, en we dus een hoofddeterminant h van r rijen en kolommen kunnen kiezen, zodat $h \neq 0$ is, kan deze hoofddeterminant door herordening in de linker bovenhoek gebracht worden — $h = \det(a_{ik})$ voor $i, k = 1, \dots, r$.

De vergelijkingen (1) zijn dan te schrijven in de vorm:

$$(2) \quad \sum_{k=1}^r a_{ik} x_k = b_i - \sum_{k=r+1}^n a_{ik} x_k, \quad \text{voor } i = 1, \dots, p.$$

De eerste r vergelijkingen hieruit zijn bij willekeurig gekozen $x_{r+1}, \dots, x_n$ volgens (5.1) met de regel van Cramer op te lossen. De oplossingen worden lineaire functies van $x_{r+1}, \dots, x_n$:

$$(3) \quad x_k = \frac{h_k(x_{r+1}, \dots, x_n)}{h}, \quad \text{voor } k = 1, \dots, r.$$

De oplossingen (3) voldoet voor $r+1 \leq q \leq n$ aan $L_q(x) - b_q = 0$, indien de q^{de} karakteristieke determinant k_q , welke uit h ontstaat door randen met de coëfficiënten van de q^{de} vergelijking (2) (dus met a_{qk} voor $k = 1, \dots, r$) en met de kolom van de bekende termen b_i (voor $i = 1, \dots, r, q$), gelijk aan 0 is. Zie hiervoor [Heyting, 1954, n^o. 11].

De gevonden oplossing (3) voldoet dus voor willekeurige $x_{r+1}, \dots, x_n$ aan (1), indien $k_{r+1} = k_{r+2} = \dots = k_p = 0$ is.

5.5: St.: Is daarentegen $k_s \neq 0$ voor minstens één index s met $s = r+1, \dots, p$, dan bestaat er geen oplossing van (1).

Bewijs: Onderstel, dat $(p_1, \dots, p_n)$ een oplossing was.

Substitutie van $x_{r+1} = p_{r+1}, \dots, x_n = p_n$ in (3) moet dan

geven (wegens 5.2) $x_1 = p_1, \dots, x_r = p_r$. Substitutie hiervan in de s^{de} vergelijking van (1) voor $r+1 \leq s \leq p$ geeft $k_s = 0$. Dit is in strijd met de onderstelling. Dit resultaat is weer te verscherpen tot een stelling over de "verscherpte noodzakelijkheid van de oplossingsvoorwaarden".

St.: $\exists_{s=r+1}^n [k_s \neq 0] \rightarrow \forall_{p_1 \dots p_n} \exists_{i=1}^p [L_i(p) \neq b_i]$.

Bewijs: Weer door het oplossingsproces te volgen.

Zij $k_s \neq 0$. Substitueer in (3) $x_{r+1} = p_{r+1}, \dots, x_n = p_n$.

Stel, dat dit oplevert: $x_1 = q_1, \dots, x_r = q_r$. Dan geldt

$$L_s(q_1, \dots, q_r, p_{r+1}, \dots, p_n) - b_s = \frac{k_s}{h} \neq 0,$$

en dus volgt uit (4.19):

$$L_s(p) - b_s \neq 0 \vee L_s(p) - b_s \neq L_s(q_1, \dots, q_r, p_{r+1}, \dots, p_n) - b_s.$$

Indien $L_s(p) - b_s \neq 0$ is, is het bewijs voltooid.

Indien $L_s(p) - b_s \neq L_s(q_1, \dots, q_r, p_{r+1}, \dots, p_n) - b_s$ is, moet er volgens (4.23) een index i met $i = 1, \dots, r$ te vinden zijn, zodat $p_i \neq q_i$ is. Uit de verscherpte eenduidigheid (5.2) van de oplossing (3) volgt dan

$$\exists_{j=1}^r [L_j(p) - b_j \neq 0].$$

5.6: De gevonden oplossing (3) met $n-r$ parameters

$x_{r+1}, \dots, x_n$ is volledig, dwz.:

$$\text{St. I: } \forall_{i=1}^p [L_i(p) = b_i] \rightarrow \forall_{i=1}^r [p_i = \frac{h_i(p_{r+1}, \dots, p_n)}{h}].$$

Bewijs: Uit (5.2) St. I.

Dit bewijs is na contrapositie (2.7) door versterking van antecedens en succedens weer positief te formuleren als de "verscherpte volledigheidstelling":

$$\text{St. II: } \exists_{i=1}^r [p_i \neq \frac{h_i(p_{r+1}, \dots, p_n)}{h}] \rightarrow \exists_{i=1}^r [L_i(p) \neq b_i].$$

Bewijs: Uit (5.2) St. II.

Hoewel we antecedens en succedens beide versterkt hebben, kunnen wij toch uit II weer I afleiden, en wel, omdat het succedens van I stabiel (3.6) is, door een indirect bewijs.

Bewijs: Onderstel $p_i \neq \frac{h_i(p_{r+1}, \dots, p_n)}{h}$.

Dan volgt uit II: $\exists_{j=1}^r [L_j(p) \neq b_j]$. Dit is strijdig met antecedens van I. Dus uit $\forall_{i=1}^p [L_i(p) = b_i]$ volgt:

$$\rightarrow \exists_i [p_i \neq \frac{h_i(p_{r+1}, \dots, p_n)}{h}], \text{ dus}$$

$$\forall_i \rightarrow [p_i \neq \frac{h_i(p_{r+1}, \dots, p_n)}{h}], \text{ en dus wegens (4.8) ook}$$

$$\forall_i [p_i = \frac{h_i(p_{r+1}, \dots, p_n)}{h}].$$

5.7: De afhankelijkheids- en onafhankelijkheidsrelaties tussen vectoren - groepen van n reële getallen, $\vec{a} \equiv (a_1, \dots, a_n)$ - zijn in de intuitionistische wiskunde in scherpere en zwakkere te verdelen.

Def.: (i) $\vec{0} \equiv (0, \dots, 0)$.

(ii) $\vec{a} = \vec{b} \equiv \bigwedge_{i=1}^n [a_i = b_i]$.

(iii) $\vec{a} \neq \vec{b} \equiv \neg \vec{a} = \vec{b}$.

(iv) $\vec{a} \# \vec{b} \equiv \bigvee_{i=1}^n [a_i \neq b_i]$.

(v) afhankelijk $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p) \equiv$

$$\equiv \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p [(\lambda_1 \neq 0 \vee \dots \vee \lambda_p \neq 0) \wedge \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}].$$

Dit is een belangrijker relatie, dan de zwakkere, welke ontstaat door $\lambda_i \neq 0$ door $\lambda_i \neq 0$ te vervangen.

(vi) onafhankelijk $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p) \equiv \neg$ afhankelijk $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$.

(vii) vrij $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p) \equiv$

$$\equiv \forall \lambda_1, \dots, \lambda_p [(\lambda_1 \neq 0 \vee \dots \vee \lambda_p \neq 0) \rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{a}_i \neq \vec{0}].$$

(viii) $\vec{b}$ is een lineaire combinatie van $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p) \equiv$

$$\equiv \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p [\vec{b} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{a}_i].$$

(ix) $\vec{b}$ is geen lineaire combinatie van $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p) \equiv$

$$\equiv \neg (\vec{b} \text{ is een lineaire combinatie van } (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)).$$

(x) $\vec{b}$ vrij van $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p) \equiv$

$$\equiv \forall \lambda_1, \dots, \lambda_p [\vec{b} \neq \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{a}_i].$$

Natuurlijk geldt de

St.: Vrij $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p) \rightarrow$ onafhankelijk $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$

en : $\vec{b}$ vrij van $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p) \rightarrow \vec{b}$ is geen lineaire combinatie van $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$.

5.8: We beschouwen p homogene lineaire vergelijkingen in n onbekenden:

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0 \quad \text{voor } i = 1, \dots, p.$$

Indien de rang r van dit stelsel bekend is, kunnen wij, omdat zeker aan de oplosbaarheidsvoorwaarden $k_{r+1} = k_{r+2} = \dots = k_p = 0$ voldaan is, een $n-r$ -voudige, scherp volledige oplossing vinden. We zeggen, dat een

s-voudige oplossing te vinden is, indien het mogelijk is s vrije oplossingsvectoren te bepalen. Dat we inderdaad hier n-r vrije vectoren kunnen kiezen, wordt in de volgende paragraaf aangetoond. Indien $r = n$ is, voldoet alleen de oplossing $\vec{x} = \vec{0}$; indien $r < n$ is, is steeds de x_{r+1} zo te kiezen, dat de verkregen oplossing $\vec{x}$ van $\vec{0}$ verwijderd is.

5.9: Indien een stelsel van homogene lineaire vergelijkingen een zekere verzameling van oplossingen toestaat, dan dan zijn alle lineaire combinaties van deze oplossingen weer oplossingen van dit stelsel.

Hieruit volgt:

St.: Indien stelsel (4) een (n-r)-voudige volledige oplossing toelaat,

(5) $x_i = \varphi_i(x_{r+1}, \dots, x_n)$ voor $i = 1, \dots, r$, dan kunnen we voor $(x_{r+1}, \dots, x_n)$ kiezen $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$, en dan zijn alle oplossingen van (4) te schrijven als lineaire combinaties van de, met deze $(x_{r+1}, \dots, x_n)$ uit (5) verkregen, vrije oplossingen $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_{n-r}$. Anderzijds zijn natuurlijk al deze lineaire combinaties oplossingen van (4).

Bewijs: Zij namelijk $(p_1, \dots, p_r, p_{r+1}, \dots, p_n) = \vec{p}$ een oplossing van (4), dan stent

$p_{r+1} \vec{q}_1 + p_{r+2} \vec{q}_2 + \dots + p_n \vec{q}_{n-r}$ met $\vec{p}$ in de laatste n-r componenten, en dus wegens de volledigheid van (5) ook in de eerste r componenten overeen.

5.10: Voorbeeld: $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$.

Geval A: De rang r is bekend.

1°. $r = 1$. Zo $a_1 \neq 0$ is, dan is $x_1 = -\frac{a_2}{a_1} x_2$ een van $\vec{0}$ verwijderde oplossing voor ieder x_2 met $x_2 \neq 0$.

Zo $a_2 \neq 0$ is, analoog.

2°. $r = 0$. Ieder van $\vec{0}$ verwijderde vector $\vec{x}$ is een van $\vec{0}$ verwijderde oplossing.

Geval B: De rang is onbekend. Dan is niet steeds een van $\vec{0}$ verwijderde oplossing aan te geven.

Tegenvoorbeeld: Definiëer hiertoe a_1 en a_2 , als $(\alpha$ en β in (4.17)).

Indien $a_1 = 0$ en $a_2 \neq 0$ is, moet gelden $x_2 = 0$, indien $a_2 = 0$ en $a_1 \neq 0$ is, moet gelden $x_1 = 0$. Zolang we geen van deze beide mogelijkheden kunnen uitsluiten, kunnen we geen van $\vec{0}$ verwijderde oplossing aangeven.

Ook van het stelsel

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 .$$

met op dezelfde wijze gedefiniëerde a_1 en a_2 , kunnen we, hoewel zeker alle minoren van de orde 2 gelijk aan 0 zijn, en de matrix dus nooit een rang 2 of groter kan hebben, geen van $\vec{0}$ verwijderde oplossing aangeven.

5.11: Wel geldt voor het stelsel (4) de zwakkere

St. : Zijn alle minoren van de orde s gelijk aan 0 met $s \leq n$, dan geldt: $\neg \neg$ (er is een van $\vec{0}$ verwijderde oplossing).

Bewijs: Onderstel:

1°. er is geen van $\vec{0}$ verwijderde oplossing.

2°. de rang van de matrix is $s-1$.

Dan bestaat een scherp volledige oplossing met $n-s+1$ parameters, dus zeker een van $\vec{0}$ verwijderde oplossing.

Dus $2^\circ \rightarrow \neg 1^\circ$. Dus $1^\circ \rightarrow \neg 2^\circ$. Dus is de rang niet $s-1$. Dus ook ieder minor van de orde $s-1$ is gelijk aan 0.

Op deze wijze van $s-i$ op $s-i-1$ overgaande bewijzen we, dat in de onderstelling 1° alle coëfficiënten $a_{ik} = 0$ moeten zijn. Maar dan is er zeker een van $\vec{0}$ verwijderde oplossing. Dus is 1° ad absurdum gevoerd.

Dus $\neg \neg$ (er is een van $\vec{0}$ verwijderde oplossing).

5.12: Klassiek geldt de stelling:

St. : Is ieder van $p+1$ vectoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p+1}$ een lineaire combinatie van p vectoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$, dan zijn deze $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p+1}$ onderling afhankelijk.

In de intuïtionistische wiskunde geldt deze stelling niet. Een tegenvoorbeeld, uit vectoren met slechts één component en met $p = 1$ opgebouwd, is als volgt te construeren:

$$\vec{a}_1 \equiv 1, \vec{b}_1 \equiv \alpha \text{ en } \vec{b}_2 \equiv \beta, \text{ waarbij } \alpha \text{ en } \beta$$

de in (4.17) gedefiniëerde en in (5.10) gebruikte, om 0 zewende, getallen (daar a_1 en a_2 genoemd) zijn. De in (5.10) gevolgde gedachtengang leert ook nu, dat we niet in staat zijn de gezochte, van 0 verwijderde, afhankelijkheidscoëfficiënten μ_1 en μ_2 , welke aan $\mu_1 \alpha + \mu_2 \beta = 0$ voldoen moeten, te bepalen.

Wel is de zwakkere stelling te bewijzen:

$$\text{St. : } \forall_{i=1}^{p+1} [\vec{b}_i = \sum_{k=1}^p \lambda_{ik} \vec{a}_k] \rightarrow$$

$$\rightarrow \neg \text{onafhankelijk} (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p+1}) .$$

Bewijs: Afhankelijk $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p+1}) \in \bar{D}$
 $\bar{D} \ni \mu_1, \dots, \mu_{p+1} [(\mu_1 \neq 0 \vee \dots \vee \mu_{p+1} \neq 0) \wedge$
 $\wedge \sum_{j=1}^{p+1} \mu_j \vec{b}_j = \vec{0}]$.

Maar dit is equivalent met:

$$\exists \mu_1, \dots, \mu_{p+1} [(\mu_1 \neq 0 \vee \dots \vee \mu_{p+1} \neq 0) \wedge$$

$$\wedge \sum_{j=1}^{p+1} \mu_j \sum_{k=1}^p \lambda_{jk} \vec{a}_k = \vec{0}]$$

Om $\mu_1, \dots, \mu_{p+1}$ te bepalen, die hieraan voldoen, is het zeker genoeg, als we een van $\vec{0}$ verwijderde oplossing van

$$(6) \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_{jk} \mu_j = 0 \text{ voor } k = 1, \dots, p$$

aangeven.

Maar hierop is (5.11) toe te passen en dus geldt:

$\neg \neg$ (er is een van $\vec{0}$ verwijderde oplossing van (6)).

Hieruit volgt direct door dubbele contrapositie

$\neg \neg$ (afhankelijk $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p+1})$).

Dit kan verzwakt worden tot:

$$\text{St. : } \forall_{i=1}^{p+1} [\vec{b}_i = \sum_{k=1}^p \lambda_{ik} \vec{a}_k] \rightarrow \neg (\text{vrij } (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p+1})).$$

5.13: Ook de inverse implicatie van stelling (5.8) is intuïtionistisch geldig.

St. : Heeft het stelsel (4) een $(n-r)$ -voudige, scherp volledige oplossing, dan is de rang van de matrix (a_{ik}) ook r .

Het bewijs, dat de rang niet groter dan r kan zijn, m.a.w., dat alle minoren van de orde $r+1$ gelijk aan 0 zijn, geschiedt door inductie. We bewijzen hiertoe, onder zwakkere onderstelling, :

St. : Heeft het stelsel (4) een minstens $(n-r)$ -voudige oplossing, dan zijn alle minoren van de orde $r+1$ gelijk aan 0.

5.14: Bewijs:

A : Voor $r = n$ is het bewijs triviaal, omdat er geen minoren van de orde $r+1$ zijn.

B : Inductie-onderstelling:

De stelling zij bewezen voor alle waarden van r met $n \geq r > s$.

Het bewijs voor $r = s$ loopt dan als volgt: Gegeven is het bestaan van een minstens $(n-s)$ -voudige oplossing van (4), a fortiori dus dat van een minstens $(n-s-1)$ -voudige oplossing van dit stelsel. Volgens de inductie-onderstelling zijn

dus alle minoren van de orde $s+2$ gelijk aan 0.

Neem nu aan, dat minstens één minor van de orde $s+1$ van 0 verwijderd is. Dan was de rang $s+1$, en er zou dus (5.8) een $(n-s-1)$ -voudige scherp volledige oplossing aan te geven zijn. Dus zouden volgens (5.9) $(n-s-1)$ vrije oplossingsvectoren te vinden zijn, zodat alle oplossingen als lineaire combinaties hiervan geschreven kunnen worden.

$(n-s)$ van deze lineaire combinaties kunnen niet onafhankelijk zijn. Dus hebben we een tegenspraak geconstrueerd met het gegeven, dat er een minstens $(n-s)$ -voudige oplossing bestaat. Dus is de aanname weerlegd en moet ieder minor van de orde $s+1$ gelijk aan 0 zijn (4.8).

5.15: Het bewijs, dat de rang minstens gelijk aan r is, m.a.w., dat er een van 0 verwijderde minor van de orde r te vinden is, wordt eveneens in verschillende stappen gevoerd.

A: Voor $r = n$. De stelling luidt dan:

St.: Is $\vec{0}$ een scherp volledige oplossing van (4), dan is er een van 0 verwijderde minor van de orde n te vinden.

5.16: Bewijs:

1°. Voor $n = 1$.

Het stelsel (4) wordt dan: $a_{i1}x_1 = 0$, voor $i = 1, \dots, p$.

Het gegeven luidt:

$$\forall_p [p \neq 0 \rightarrow \exists_i [a_{ip} \neq 0]].$$

Kies $p = 1$. Dan geldt dus $\exists_i [a_{i1} \neq 0]$. Dus is er een van 0 verwijderde minor van de orde 1 te vinden.

5.17: 2°. Voor $n > 1$, in de inductie-onderstelling, dat de stelling reeds voor ieder $m < n$ bewezen is.

Het gegeven luidt weer:

$$\forall_{\vec{p}} [\vec{p} \neq 0 \rightarrow \exists_i [\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \neq 0]].$$

Dit geldt a fortiori voor alle vectoren $\vec{p}$ met $p_n = 0$.

Dus geldt:

$$\forall_{\vec{p}} [(\vec{p} \neq 0 \wedge p_n = 0) \rightarrow \exists_i [\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}x_k \neq 0]].$$

De inductie-onderstelling leert nu, dat in de matrix (a_{ij}) met $i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, n-1$, minstens één van 0 verwijderde minor van de orde $n-1$ te vinden is.

Dit zij: $h \in \bar{D}(a_{ij})$ met $i = 1, \dots, n-1$; $j = 1, \dots, n-1$.

Het stelsel $\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = 0$ met $i = 1, \dots, n-1$ heeft dus de rang $n-1$.

Dus is (5.8) een scherp volledige enkelvoudige oplossing (5.4)

$$x_k = \frac{h_k(x_n)}{h} \quad \text{met } k = 1, \dots, n-1$$

hiervan te vinden. Indien wij $x_n \neq 0$ kiezen, is dit een van $\vec{0}$ verwijderde vector. Dus geldt dan:

$$\exists_{i=n}^p \left[\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} \frac{h_k(x_n)}{h} + a_{in} x_n \neq 0 \right].$$

Noem de index i , waarvoor dit geldt: j .

Uitgeschreven levert dit echter:

$$\begin{vmatrix} a_{j,1} & \dots & a_{j,n-1} & a_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_j,1 & \dots & a_j,n-1 & a_j,n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dus is een van 0 verwijderde minor van de orde n gevonden.

5.18: B: Voor $n > r$:

De Stelling luidt dan:

St.: Heeft het stelsel (4) een scherp volledige $(n-r)$ -voudige oplossing, dan is in de matrix a_{ik} ervan, minstens één van 0 verwijderde minor van de orde r te vinden.

5.19: Bewijs: Iedere vector $\vec{p}$, met

$\vec{p} = (p_1, \dots, p_r, 0, \dots, 0)$, waarbij voor minstens één index k , met $k = 1, \dots, r$, p_k van 0 verwijderd is, is van iedere oplossingsvector $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ van (4) verwijderd.

Immers steeds geldt:

$$p_k \neq q_k \vee q_k \neq 0.$$

Maar $q_k = \frac{h_k(q_{r+1}, \dots, q_n)}{h}$ is een homogene lineaire functie van $q_{r+1}, \dots, q_n$. Indien dus $q_k \neq 0$ is moet ook minstens één van de getallen $q_{r+1}, \dots, q_n$ van 0 verwijderd zijn (4.23).

In beide gevallen geldt dus $\vec{p} \neq \vec{q}$. Wegens de scherpe volledigheid bestaat er dus een index i , zodat

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} p_k = \sum_{k=1}^r a_{ik} p_k \neq 0 \text{ is.}$$

Voor het stelsel

$$\sum_{k=1}^r a_{ik} x_k = 0 \quad \text{met } i = 1, \dots, p \text{ is dus } \vec{0} \text{ een}$$

scherp volledige oplossing. Volgens A is dus in (a_{ik})

met $i = 1, \dots, p$; $k = 1, \dots, r$ een van 0 verwijderde minor van de orde r te vinden. Dit is a fortiori het geval in (a_{ik}) met $i = 1, \dots, p$; $k = 1, \dots, n$.

5.20: St.: Indien in een matrix A

$$A = (a_{ik}) \text{ met } i = 1, \dots, p ; k = 1, \dots, n .$$

een van 0 verwijderde minor van de orde r te vinden is, en indien tevens alle determinanten, welke hieruit ontstaan door randen met de s^{de} rij en de t^{de} kolom van A ($s = 1, \dots, p$; $t = 1, \dots, n$) aan 0 gelijk zijn, dan zijn alle minoren van de orde $r+1$ uit A gelijk aan 0 en is A dus van de rang r .

Bewijs: Het intuitionistische bewijs hiervoor loopt geheel parallel aan het klassieke.

5.21: Dit resultaat is weer te verscherpen tot de stelling:

St. : Indien in A een minor M_r van de orde r en een minor M_{r+1} van de orde $r+1$ van 0 verwijderd zijn, dan is ook minstens één van de minoren, welke uit M_r door randen met een rij en een kolom ontstaan, van 0 verwijderd.

5.22: Bewijs: Zij $0 \neq M_r = |a_{ik}|$ met $i = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, r$. Dan zijn de vergelijkingen:

$$\sum_{k=1}^r a_{ik} \mu_{kl} = a_{il} \quad \text{met } i = 1, \dots, r$$

oplosbaar voor $l = r+1, \dots, n$.

We definiëren nu met de zo bepaald μ_{kl} .

$$a'_{il} = \sum_{k=1}^r a_{ik} \mu_{kl} \quad \text{voor } i = r+1, \dots, p ; l = r+1, \dots, n .$$

$$a'_{il} = a_{il} \quad \text{voor de overige indices.}$$

Van de matrix $A' = (a'_{ik})$ zijn dus de kolommen lineaire combinaties van de eerste r daarvan.

Naast $M_{r+1}(a_{ik})$ is nu te vormen $M_{r+1}(a'_{ik})$.

Maar $M_{r+1}(a'_{ik}) = 0$. Dus $M_{r+1}(a_{ik}) \neq M_{r+1}(a'_{ik})$.

Dus zijn indices s en t te vinden, zodat geldt: (4.23)

$$a_{st} \neq a'_{st} .$$

De determinant $|a_{ik}|$ met $i = 1, \dots, r, s$; $k = 1, \dots, r, t$ verschilt van $|a'_{ik}|$ met dezelfde rijen en kolommen alleen in het element a_{st} , resp. a'_{st} . Deze $|a'_{ik}|$ is gelijk aan 0 . Dus $|a_{ik}| = (a_{st} - a'_{st})M_r$. Beide factoren zijn verwijderd van 0. Dus hebben we door randen van M_r met de s^{de} rij en de t^{de} kolom een van 0 verwijderde minor gevonden.

5.23: Def.: De (vector-)rang van een stelsel n -vectoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ is r $\iff$ onder de vectoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ zijn r vrije vectoren te vinden, waarvan de overige lineaire combinaties zijn.

St.: De vectorrang van het stelsel vectoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ (met $\vec{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$) is $r \iff$ de matrixrang van de matrix $A = (a_{ik})$ (met $i = 1, \dots, p$; $k = 1, \dots, n$) is r .

5.24: Bewijs: $1^\circ: \longrightarrow$:

Gegeven $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ zijn vrij:

Dus: $\forall \vec{1} = (1_1, \dots, 1_r) [\vec{1} \neq \vec{0} \longrightarrow \sum_{i=1}^r 1_i \vec{a}_i \neq \vec{0}]$.

of: $\forall \vec{1} = (1_1, \dots, 1_r) [\vec{1} \neq \vec{0} \longrightarrow \exists_{k=1}^n [\sum_{i=1}^r 1_i a_{ik} \neq 0]]$.

Dus $\vec{0}$ is een scherp volledige oplossing van

$$\sum_{i=1}^r x_i a_{ik} = 0.$$

Dus is in de matrix hiervan een van 0 verwijderde minor van de orde r te vinden (5.15).

Alle overige $\vec{a}_{r+1}, \dots, \vec{a}_p$ zijn lineaire combinaties van $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$. Dus in de matrix A zijn alle minoren van de orde $r+1$ gelijk aan 0 (5.20).

5.25: $2^\circ: \longleftarrow$:

Gegeven de minor $h = |a_{ik}|$ (met $i = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, r$) is verwijderd van 0, en alle minoren met $r+1$ rijen kolommen uit A zijn gelijk aan 0.

Dan is $\vec{0}$ een scherp volledige oplossing van

$$\sum_{i=1}^r x_i a_{ik} = 0 \quad \text{met } k = 1, \dots, n.$$

Dus zijn de vectoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ vrij.

De vergelijkingen $\sum_{i=1}^r x_i a_{ik} = a_{jk}$ voor $k = 1, \dots, n$

zijn op te lossen voor $j = r+1, \dots, p$, omdat alle karakteristieke determinanten, als minoren van de orde $r+1$ uit A , gelijk aan 0 zijn.

Dus zijn de overige vectoren inderdaad lineaire combinaties van $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$.

5.26: De klassieke, intuïtionistisch niet geldende stelling, (5.12), dat $p+1$ lineaire combinaties $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p+1}$ van p vectoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ een afhankelijk stelsel vormen,

$\bigvee_{k=1}^{p+1} [\vec{b}_k \text{ lineaire combinatie van } (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)] \rightarrow$

$\rightarrow$ afhankelijk $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p+1})$,
gaat door contrapositie over in:

onafhankelijk $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p+1}) \rightarrow$

$\rightarrow \neg \bigvee_{k=1}^{p+1} [\vec{b}_k \text{ lineaire combinatie van } (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)]$.

Deze laatste stelling volgt ook door contrapositie uit de tweede stelling van (5.12) en is dus ook intuïtionistisch geldig. Zij kan echter niet versterkt worden tot

onafhankelijk $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p+1}) \rightarrow$

$\rightarrow \bigwedge_{k=1}^{p+1} [\vec{b}_k \text{ geen lineaire combinatie van } (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)]$.

5.27: Een tegenvoorbeeld hiervoor wordt, met behulp van een stelsel vectoren $\vec{a}_1$ en $\vec{a}_2$, waarvan de afhankelijkheid of onafhankelijkheid onbekend is, als volgt geconstrueerd:

$\vec{a}_1 \in \mathbb{D} (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 \in \mathbb{D} (1, 1+a, 1+b)$, waarbij a en b onafhankelijke reële getallen zijn, waarvan de verhouding onbekend is (evenals in (4.17), (5.10), (5.12)).

$\vec{b}_1 \in \mathbb{D} (1, 0, 0)$, $\vec{b}_2 \in \mathbb{D} (0, 1, 0)$, $\vec{b}_3 \in \mathbb{D} (0, 0, 1)$.

$\vec{b}_1$ is geen lineaire combinatie van $\vec{a}_1$ en $\vec{a}_2$, indien

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1+b \end{vmatrix} \neq 0$$

is, en dus, indien $a \neq b$ is.

$\vec{b}_2$ is geen lineaire combinatie van $\vec{a}_1$ en $\vec{a}_2$, indien

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1+b \end{vmatrix} \neq 0$$

is, en dus, indien $b \neq 0$ is.

$\vec{b}_3$ is geen lineaire combinatie van $\vec{a}_1$ en $\vec{a}_2$, indien

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1+b \end{vmatrix} \neq 0$$

is, en dus, indien $a \neq 0$ is.

Zolang dus geen van deze drie mogelijkheden bewezen kan worden, is geen $\vec{b}_i$ aan te geven, die niet een lineaire combinatie van $\vec{a}_1$ en $\vec{a}_2$ is.

5.28: Wel geldt een analoge stelling, indien we het vrij zijn van $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ mede veronderstellen en antecedens en succedens versterken:

$$\begin{aligned} \text{St. : } & \text{vrij } (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p) \wedge \text{vrij } (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{p+1}) \longrightarrow \\ & \longrightarrow \exists_{k=1}^{p+1} [\vec{b}_k \text{ vrij van } (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)] . \end{aligned}$$

Bewijs: Beschouw de matrix:

$$M \equiv \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & \dots & \dots & \dots & a_{p,n} \\ b_{1,1} & \dots & \dots & \dots & b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1,1} & \dots & \dots & \dots & b_{p+1,n} \end{vmatrix}$$

Omdat $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ vrij zijn, is in M en van O verwijderde minor (kies deze als $h = a_{ij}$, met $i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, p$) van de orde p te vinden, en op dezelfde wijze een van O verwijderde minor van de orde $p+1$, welke uit elementen b_{ik} opgebouwd is.

Uit (5.21) volgt dan, dat we ook door randen van h met een rij en kolom van M een van O verwijderde minor van de orde $p+1$ kunnen verkrijgen. Zij deze minor uit h voortgebracht door randen met de s^{de} rij en de t^{de} kolom

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & \dots & a_{1,p} & a_{1,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & \dots & \dots & \dots & a_{p,p} & a_{p,t} \\ b_{s,1} & \dots & \dots & \dots & b_{s,p} & b_{s,t} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Dan is $\vec{b}_s$ vrij van $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$.

Deze stelling is ook meetkundig van groot belang, omdat hierdoor het begrip dimensie van een lineaire ruimte, positief bruikbaar wordt.

§ 6: Veeltermen.

Vergelijk voor een gedeeltelijk met deze paragraaf parallel lopende behandeling van dit onderwerp [A. Heyting, 1941, § 3].

6.1: Een veelterm $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ heeft de graad m , indien $a_m \neq 0$ is en voor ieder i , met $i > m$, geldt $a_i = 0$.

Indien één of meer begincoëfficiënten van $f(x)$ om 0 zweven, is de graad van $f(x)$ onbekend.

Een maximum graad van $f(x)$ is een natuurlijk getal k , zodat voor alle $i > k$ geldt $a_i = 0$. Ieder natuurlijk getal, dat $\geq n$ is, is dus zeker een maximum graad.

Een minimum graad van $f(x)$ is een natuurlijk getal h , zodat er een $a_i \neq 0$ te vinden is, met $i \geq h$.

6.2: Zij weer $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ en $g(x) = \sum_{i=1}^m b_i x^i$ en $n \geq m$ dan definiëren wij:

$$f(x) \equiv g(x) \stackrel{\text{D}}{=} \bigwedge_{i=1}^m [a_i = b_i] \wedge \bigwedge_{i=m+1}^n [a_i = 0]$$

$$f(x) \not\equiv g(x) \stackrel{\text{D}}{=} \bigvee_{i=1}^m [a_i \neq b_i] \vee \bigvee_{i=m+1}^n [a_i \neq 0].$$

6.3: De algorithmus, om $f(x)$ op een andere veelterm $g(x) = \sum_{i=1}^m b_i x^i + \dots + b_0$ te delen, kan alleen uitgevoerd worden,

$$a_n x^n + \dots + a_0 \Big/ b_m x^m + \dots + b_0 \searrow \frac{b_m}{a_n} x^{n-m} + \dots,$$

indien $a_n \neq 0$, en dus de graad van $f(x)$ bekend, is.

Het bepalen van de G.G.D. van twee veeltermen met behulp van de algorithmus van Euclides, kan, wanneer een van de optredende resten een onbekende graad heeft, op dezelfde wijze mislukken.

6.4: In een product van twee veeltermen $f(x) \equiv g(x) \cdot h(x)$, of uitgeschreven:

$$a_n x^n + \dots + a_0 \equiv (b_p x^p + \dots + b_0)(c_q x^q + \dots + c_0),$$

kan het bekend zijn, dat $a_{p+q} = b_p \cdot c_q = 0$ is zonder dat uitgemaakt kan worden, of $b_p = 0$, dan wel $c_q = 0$ geldt (4.17).

Natuurlijk geldt ook intuitionistisch steeds

$$a_k = b_p c_{k-p} + b_{p-1} c_{k-p+1} + \dots + b_{k-q} c_q,$$

waarbij als gewoonlijk gedefiniëerd is $b_i = 0$ voor $i < 0$ en $i > p$, $c_i = 0$ voor $i < 0$ en $i > q$. Hieruit volgt onmiddellijk (4.21) de stelling:

St.: $a_k \neq 0 \rightarrow \exists_{r=k-q}^p [b_r c_{k-r} \neq 0]$ en andersom ook:

St.: $b_r c_s \neq 0 \rightarrow \exists_j [j \geq r+s \wedge a_j \neq 0]$.

Bewijs: Zij $b_r c_s \neq 0$ en $r+s = k$. Dan is minstens één van de drie volgende mogelijkheden vervuld:

$$\alpha: a_k \neq 0.$$

$$\beta: \exists_t [b_{r-t} c_{s+t} \neq 0].$$

$$\gamma: \exists_u [b_{r+u} c_{s-u} \neq 0].$$

In het geval α is het bewijs geleverd. In de gevallen

β en γ is te concluderen, (4.20), dat ook

$b_r c_{s+t} \neq 0$, respectievelijk $b_{r+u} c_s \neq 0$, is.

Zeker is dus of $a_k \neq 0$ of $b_{r'} c_{s'} \neq 0$ met $r' + s' > k$.

Uit dit laatste is weer te concluderen of $a_{r'+s'} \neq 0$ of

$b_{r''} c_{s''} \neq 0$ met $r'' + s'' > r' + s' > k$.

Omdat termen b_h met $h > p$ en c_i met $i > q$

niet voorkomen, moet dus of voor een index j met

$$r+s \leq j < p+q \text{ gelden}$$

$$a_j \neq 0$$

$$\text{of } a_{p+q} = b_p c_q \neq 0.$$

6.5: Indien we een van 0 verwijderde coëfficiënt a_{n-t} van $f(x)$ kennen (en dus $n-t$ een minimumgraad van $f(x)$ is), kunnen we een bovengrens aangeven voor de graden van de factoren $g(x)$ en $h(x)$, met behulp van de stelling:

St.: $a_{n-t} \neq 0 \rightarrow \forall_{u,v} [u+v > n+t \rightarrow b_u = 0 \vee c_v = 0]$.

Bewijs: Zij $a_{n-t} \neq 0$ en $u+v > n+t$. Volgens (6.4)

kunnen we r en s bepalen, zodat $r+s = n-t$ en

$b_r c_s \neq 0$ is. Dan is $u+v+r+s > 2n$. Dus zeker

$u+s > n$ of $v+r > n$.

Stel, dat $u+s > n$ is. We weten (4.20), dat $c_s \neq 0$ is. Onderstel nu, dat $b_u \neq 0$ was. Dan zou er een k , met $k \geq u+s > n$ te vinden zijn, zodat $a_k \neq 0$ was (6.4). Maar dit is niet mogelijk. Dus is $b_u = 0$ (4.8).

Analoog is, indien $v+r > n$ is, aan te tonen, dat $c_v = 0$ moet zijn.

Opmerking: Hadden we dus een ontbinding geprobeerd met $p+q > n+t$ dan gold $b_p = 0 \vee c_q = 0$. We hadden

dus een van beide kunnen schrappen. Hieruit volgt, dat we alleen ontbindingen met $p + q \leq n + t$ behoeven te beschouwen.

6.6: Een voorbeeld zij:

$$f(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + \dots + a_0.$$

Indien bekend is, dat $a_3 \neq 0$ is, is het volgens de voorafgaande stelling onnodig bij het zoeken van mogelijke ontbindingen $f(x) = g(x) \cdot h(x) = \sum_{i=0}^p b_i x^i \cdot \sum_{j=0}^q c_j x^j$ verder te gaan dan tot en met $p + q = 5 + (5 - 3) = 7$.

In het speciaal belangrijke geval $t = 0$ wordt de stelling: Is $a_n \neq 0$, dan geldt voor $p + q > n$ zeker $b_p = 0$ v $c_q = 0$. Dus geldt de stelling:

St.: Een veelterm $f(x)$ met bekende graad n is alleen te ontbinden in twee veeltermen $g(x)$ en $h(x)$, indien $g(x)$ en $h(x)$ beide bekende graden hebben (p , resp. q) en $p + q = n$ is.

5.7: Bij het bestuderen van de deelbaarheid van een veelterm

$$g(x) = \sum_{i=1}^m b_i x^i$$

op een veelterm

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i,$$

beschouwen we eerst het eenvoudigste geval, waarin $b_m \neq 0$ is.

Dan is de delingsalgorithmus uitvoerbaar en kunnen we schrijven:

$$f(x) \equiv g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

waarbij $r(x) = \sum_{i=1}^{m-1} c_i x^i$ een veelterm met maximumgraad $m-1$ is.

Da geldt onmiddellijk

St.: $r(x) \equiv 0 \longrightarrow g(x) \mid f(x)$, maar ook

St.: $r(x) \not\equiv 0 \longrightarrow f(x) \not\equiv h(x) \cdot g(x)$ voor iedere veelterm $h(x)$.

Bewijs: Zij $r(x) \not\equiv 0$. Maar $f(x) \equiv g(x)q(x) + r(x)$.

Dus $f(x) \not\equiv g(x) \cdot q(x)$. Voor willekeurige $h(x)$ geldt nu (analoog 4.19) $f(x) \not\equiv g(x) \cdot h(x)$ of $g(x)q(x) \not\equiv g(x)h(x)$.

Uit dit laatste alternatief volgt $h(x) \not\equiv q(x)$, en daaruit weer, dat $f(x) - g(x)h(x)$ zelfs een van 0 verwijderde coëfficiënt d_r van de r^{de} macht van x met $r > m-1$ bezit.

Dus geldt in beide gevallen:

$$f(x) \not\equiv g(x) \cdot h(x).$$

6.8: In het geval, dat van de deler $g(x)$ geen van 0 verwijderde begincoëfficiënt b_m bekend is, moeten we de delingsalgorithmus vermijden.

We onderstellen wel $g(x) \neq 0$, zodat minstens één van 0 verwijderde coëfficiënt b_r bekend is, en pogen een

$$q(x) = \sum_{i=0}^p q_i x^i$$

te bepalen, zodat

$$f(x) \equiv g(x)q(x) \text{ geldt.}$$

Indien $q_j \neq 0$ is, geldt, omdat $b_r \neq 0$ is, wegens (5.4), er bestaat een k , met $k \geq j+r$, zodat $a_k \neq 0$ is. Dus moet zeker gelden $j+r \leq n$, of $j \leq n-r$. Dus voor $j > n-r$ geldt $q_j = 0$ en dus $q_j = 0$. Dus kunnen we stellen

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n-r} q_i x^i.$$

6.9: Opdat nu aan

$\sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{j=0}^m b_j x^j \cdot \sum_{k=0}^{n-r} q_k x^k$ voldaan zij, moeten de $n-r+1$ gezochte getallen $q_{n-r}, \dots, q_0$ voldoen aan de volgende $m+n-r+1$ lineaire vergelijkingen:

$$\begin{aligned} b_m q_{n-r} &= a_{m+n-r} \\ b_{m-1} q_{n-r} + b_m q_{n-r-1} &= a_{m+n-r-1} \\ b_{m-2} q_{n-r} + b_{m-1} q_{n-r-1} + b_m q_{n-r-2} &= a_{m+n-r-2} \\ \dots &\dots \\ \dots &\dots \\ b_0 q_2 + b_1 q_1 + b_2 q_0 &= a_2 \\ b_0 q_1 + b_1 q_0 &= a_1 \\ b_0 q_0 &= a_0 \end{aligned}$$

We beschouwen van de coëfficiënten-matrix M de minor M_r met $n-r+1$ rjen en kolommen, waarvan alle elementen in de hoofddiagonaal b_r zijn. M_r is dan óf zelf verwijderd van 0 óf minstens één van de overige termen ervan, behalve b_r^{n-r+1} , is verwijderd van 0. Ieder van deze termen bevat minstens één element, dat boven de hoofddiagonaal geplaatst is, en dat dus, indien die term van 0 verwijderd is, zelf ook van 0 verwijderd moet zijn.

Dus is óf $M_r \neq 0$ of te vinden een $s > r$, zodat $b_s \neq 0$ is. Dezelfde gedachtengang is dan voor M_s te herhalen. In ieder geval kunnen we dus een van 0 verwijderde minor van M vinden, welke van de orde $n-r+1$ is. De rang van M is dus $n-r+1$.

Voldoende en scherp noodzakelijk voor het bestaan van een oplossing $(q_{n-r}, \dots, q_0)$ is dus (5.4, 5.5), dat de m

karacteristieke determinanten $K_1, \dots, K_m$ alle gelijk aan 0 zijn. We vinden dus de stelling:

St.: $K_1 = 0 \wedge \dots \wedge K_m = 0 \Leftrightarrow g(x) \mid f(x)$ en

en : $\exists_{i=1}^m [K_i \neq 0] \Leftrightarrow f(x) \nmid g(x) \cdot h(x)$, voor ieder veelterm $h(x)$.

6.10: In (6.8) en (6.9) hebben we dus de vraag of een veelterm $f(x)$ deelbaar is door een van 0 verwijderde veelterm $g(x)$ teruggebracht tot het (echter niet steeds in een eindig aantal stappen uit te voeren) onderzoek, of zekere, een eindig aantal, reële getallen gelijk aan 0 zijn. Het van 0 verwijderd zijn van één dezer getallen leverde ook in beide gevallen een scherpe ondeelbaarheid van $f(x)$ door $g(x)$.

§ 7 : Limietprocessen.

Oneindige rijen en reeksen van reële getallen.

(Zie voor een uitvoerigere behandeling van dit onderwerp: [J.G. Dijkman, 1952] en de in dit proefschrift aangehaalde artikelen van M.J. Belinfante).

7.1: Een fundamentele stelling van de klassieke analyse is de stelling van de kleinste bovengrens:

Iedere van boven beperkte, niet lege verzameling V van reële getallen bezit een kleinste bovengrens, of in formule:

$$\begin{aligned} \exists_x [x \in V] \wedge \exists_m \forall_x [x \in V \rightarrow x \nlessdot m] \rightarrow \\ \rightarrow \exists_g \forall_y [\forall_x [x \in V \rightarrow x \nlessdot y] \Leftrightarrow g \nlessdot y]. \end{aligned}$$

Intuitionistisch geldt deze stelling niet voor de in § 4 ingevoerde reële getallen. Dit is de oorzaak van sommige ingrijpende verschillen tussen de klassieke en de, op deze definitie van reëel getal opgebouwde, intuitionistische analyse.

Klassiek volgt uit de stelling van de kleinste bovengrens, dat iedere monotone, beperkte rij convergeert, of in formule:

$$\forall_i [a_i \nlessdot a_{i+1}] \wedge \forall_i [a_i \nlessdot m] \rightarrow \exists_a [\lim_{i \rightarrow \omega} a_i = a].$$

De kleinste bovengrens van de verzameling der getallen a_i kan namelijk als limes genomen worden.

7.2: Intuitionistisch is het eenvoudig een tegenvoorbeeld te construeren, tegelijk tegen de stelling van de kleinste bovengrens en tegen de stelling, dat iedere monotone, beperkte rij convergeert.

Tegenvoorbeeld:

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \text{ voor } n < k \\ a_n &= 1 \text{ voor } n \geq k. \end{aligned}$$

Hierbij kiezen we voor k weer het nummer van de 9 uit het eerste "rijtje" "0 1 2 3 4 5 6 7 8 9", dat in de decimale ontwikkeling van π voorkomt. k is dan geen, in een eindig aantal stappen te bepalen, natuurlijk getal. k hoeft zelfs niet te bestaan, maar wel is voor ieder getal n uit te maken of $n < k$, $n = k$, dan wel $n > k$ geldt, dwz., of onder de eerste n decimalen van π resp.: geen rijtje voorkomt; precies één rijtje voorkomt, waarvan de "9" de n^{de} decimaal van π is; een rijtje voorkomt, waarvan de "9" nog vóór de n^{de} decimaal van π optreedt. We noemen daarom k het "vluchtgetal van het rijtjesprobleem" en gebruiken k alleen in de combinaties $n < k$, $n = k$, $n > k$ als eenvoudige afkorting.

Bovengrens en limes kunnen nog 0 of 1 worden, al naar de uitslag van het rijtjesprobleem. Over de constructieve existentie ervan kan dus nog niets geponeerd worden.

7.3: De intuitionistische definities van positieve limiet, van positieve convergentie en van het positieve criterium van Cauchy luiden als volgt:

$${}^+ \lim a_n = a \stackrel{\text{D}}{=} \forall_p \exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a| < 2^{-p}] .$$

$${}^+ \text{convergent } \{a_n\} \stackrel{\text{D}}{=} \exists_a [{}^+ \lim a_n = a] .$$

$${}^+ \text{Cauchy } \{a_n\} \stackrel{\text{D}}{=} \forall_p \exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a_n| < 2^{-p}] .$$

Voor de positieve convergentie moet dus zowel het reële getal a , als ook voor ieder p het natuurlijke getal $n(p)$, dat de convergentiesnelheid bepaalt, constructief aan te geven zijn.

7.4: Intuitionistisch, zowel als klassiek, geldt:

$$\text{St.: } {}^+ \text{Cauchy } \{a_n\} \iff {}^+ \text{convergent } \{a_n\} .$$

Het bewijs " $\leftarrow$ " onderscheidt zich niet van het triviale klassieke bewijs. Van de vele klassieke bewijzen " $\rightarrow$ " is het volgende ook intuitionistisch geldig:

Vanaf $a_{n(p)}$ liggen alle getallen $a_{n(p)+r}$ in het inter-

val $(a_{n(p)} - 2^{-p}, a_{n(p)} + 2^{-p})$, dus (indien a_n bepaald wordt gedacht door de rationale interval-schakeling $a_n \equiv (a_{n,m,1}, a_{n,m,2})$, waarbij ook $m(p)$ zo groot gekozen kan worden, dat

$a_{n(p),m(p),2} - a_{n(p),m(p),1} < 2^{-p}$ geldt) ook in het rationale interval

$(a_{n(p),m(p),1} - 2^{-p+2}, a_{n(p),m(p),2} + 2^{-p+2})$, waarbij de +2 aan de exponent van 2 is toegevoegd om zeker bij stijgende p een inkrimpende rij intervallen te krijgen. Omdat deze intervallenrij convergeert, bepaalt zij op constructieve wijze een reëel getal a . Dat $\lim a_n = a$ geldt, is nu eenvoudig te controleren.

7.5: De eenduidigheid en de verwisselbaarheid met som, verschil en productvorming zijn voor deze positieve limiet gemakkelijk door een redenering, analoog aan de klassieke bewijzen aan te tonen.

St.: $\lim a_n = a \wedge \lim a_n = a' \rightarrow a = a'$.

St.: $\lim a_n = a \wedge \lim b_n = b \rightarrow \lim (a_n + b_n) = a + b$.

St.: $\lim a_n = a \rightarrow \lim (-a_n) = -a$.

St.: $\lim a_n = a \wedge \lim b_n = b \rightarrow \lim (a_n b_n) = a \cdot b$.

7.6: Indien we de eis, dat de convergentiesnelheid $n(p)$ constructief te bepalen moet zijn, laten vallen kunnen we parallel met (7.3) de definities van negatieve limiet, negatieve convergentie en het negatieve criterium van Cauchy opstellen.

$$\neg \lim a_n = a \equiv \forall_p \neg \exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a| < 2^{-p}] .$$

$$\neg \text{convergent } \{a_n\} \equiv \exists_a [\neg \lim a_n = a] .$$

$$\neg \text{Cauchy } \{a_n\} \equiv \forall_p \neg \exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a_n| < 2^{-p}] .$$

De existentie van de limiet a moet dus weer constructief aan te tonen zijn. Het tegenvoorbeeld van (7.2) geldt dus ook voor negatieve convergentie.

7.7: Uitgaande van de betekenis, die we in de intuitionistische wiskunde aan de woorden "voor alle x ", "er bestaat een x ", "en", "of", "niet", en "als ..., dan ..." (dus aan de symbolen " $\forall_x$ ", " $\exists_x$ ", " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\neg$ " en " $\rightarrow$ ") hechten (§ 2), kunnen we onmiddellijk laten zien, dat voor willekeurige wiskundige uitspraken $A, B, C, \dots P(x), Q(y) \dots, R(x,y) \dots$ zekere stellingen gelden (2.7, 3.5, 3.6, 4.4, 4.7, 4.21).

In deze paragraaf hebben we de volgende stellingen uit deze "intuitionistische logica" nodig.

St.1: $\forall_x[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow (\forall_x[A(x)] \rightarrow \forall_x[B(x)])$.

Gegeven $\forall_x[A(x) \rightarrow B(x)]$ en $\forall_x[A(x)]$. Kies een willekeurige waarde a van de variabele x . Hiervoor geldt dan $A(a)$ en $A(a) \rightarrow B(a)$. Dus ook $B(a)$. Dus geldt $\forall_x[B(x)]$.

St.2: $\neg \exists_x[P(x)] \Leftrightarrow \forall_x[\neg P(x)]$.

Bewijs: $\rightarrow$: Gegeven $\neg \exists_x[P(x)]$. Onderstel, dat voor een zekere a gold $P(a)$. Dan gold ook $\exists_x[P(x)]$. Dit is strijdig met het gegeven. Dus op grond van het gegeven geldt $\neg P(a)$, voor willekeurige a , dus ook $\forall_x[\neg P(x)]$.

$\leftarrow$: Gegeven $\forall_x[\neg P(x)]$. Dus voor iedere a geldt $\neg P(a)$. Was dus voor zekere a bewezen $P(a)$, dan hadden we een contradictie. Dus ook uit $\exists_x[P(x)]$ volgt een contradictie. Dus geldt $\neg \exists_x[P(x)]$. Door een contrapositie volgt uit deze laatste stelling:

St.3: $\neg \neg \exists_x[P(x)] \Leftrightarrow \neg \forall_x \neg [P(x)]$.

In (4.7) hebben we reeds laten zien:

St.4: $\exists_x[\neg P(x)] \rightarrow \neg \forall_x[P(x)]$.

De omgekeerde implicatie:

$\neg \forall_x[P(x)] \rightarrow \exists_x[\neg P(x)]$ geldt natuurlijk intuitionistisch niet. Uit het gegeven volgt namelijk geen methode om in een eindig aantal stappen een a , waarvoor $\neg P(a)$ geldt, te bepalen.

7.8: Als toepassingen van St.3 en St.1 respectievelijk van $A \rightarrow \neg \neg A$ (2.7) en St.1 geldt nu

St.: $\neg \lim a_n = a \Leftrightarrow \forall_p \neg \forall_n \neg \forall_r [|a_{n+r} - a| < 2^{-p}]$.

$\neg \text{Cauchy } \{a_n\} \Leftrightarrow \forall_p \neg \forall_n \neg \forall_r [|a_{n+r} - a_n| < 2^{-p}]$.

${}^+\lim a_n = a \rightarrow \neg \lim a_n = a$.

${}^+\text{Cauchy } \{a_n\} \rightarrow \neg \text{Cauchy } \{a_n\}$.

Een rij $\{a_n\}$, waarvoor $\neg \text{Cauchy } \{a_n\}$ geldt, heet ook nonoscillerend.

7.9: Een voorbeeld van een wel negatief, maar niet positief convergente rij is als volgt aan te geven.

$a_n = 0$ voor $n \neq k$.

$a_n = 1$ voor $n = k$.

waarbij k weer het "vluchtgetal van het rijtjesprobleem" is (7.2). De rij $\{a_n\}$ convergeert inderdaad negatief naar 0. Onderstel namelijk, dat voor een zekere p geldt

$$\neg \exists n \forall r [|a_{n+r} - 0| < 2^{-p}] .$$

Indien er een getal k bestaat, is zeker voor $n > k$.

$$\forall r [|a_{n+r} - 0| < 2^{-p}] .$$

Dus uit onze onderstelling volgt, dat er geen k bestaat.

Maar dan geldt zelfs voor ieder n

$$\forall r [|a_{n+r} - 0| < 2^{-p}] .$$

Dus is uit de onderstelling een contradictie afgeleid en geldt

$$\forall p \rightarrow \neg \exists n \forall r [|a_{n+r} - 0| < 2^{-p}] .$$

Van de rij $\{a_n\}$ mogen we niet beweren, dat deze positief naar 0 convergeert; dit zou immers betekenen (voor $p = 1$), dat k óf niet bestond, óf constructief te berekenen was, terwijl geen van deze alternatieven ons bekend is.

7.10:

St. : $\neg$ convergent $\{a_n\} \rightarrow \neg$ Cauchy $\{a_n\}$.

Bewijs triviaal (uit het positieve bewijs): ¹⁾

De omgekeerde implicatie $\neg$ Cauchy $\{a_n\} \rightarrow \neg$ convergent $\{a_n\}$ mogen we intuïtionistisch niet affirmeren. Uit het negatieve criterium van Cauchy kan niet tot een constructief bestaan van de limes a besloten worden.

Tegenvoorbeeld:

$$a_n = 0 \text{ voor } n < k$$

$$a_n = 1 \text{ voor } n \geq k$$

Het bewijs van $\neg$ Cauchy $\{a_n\}$ gaat als in (7.9).

Uit $\neg \lim a_n = 0$ zou volgen, dat er geen "rijtje" in voorkomt, uit $\neg \lim a_n = 1$, dat dit wel het geval is.

Geen van beide is dus te affirmeren.

7.11: De rij $\{a_n\}$ uit (7.10) is 2-voudig negatief convergent naar 0 en 1.

De definitie van p-voudige negatieve limes kunnen we als volgt vastleggen:

$$\neg^p\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (b_1, \dots, b_p) \stackrel{D}{=} \neg \bigvee_{i=1}^p [\neg \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b_i] .$$

Analoog is de definitie van ω -voudige negatieve limes:

$$\neg^\omega\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (b_1, b_2, \dots) \stackrel{D}{=} \neg \bigvee_{i=1}^\infty [\neg \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b_i] .$$

Een voorbeeld van een ω -voudig convergente, voor geen eindige p , p -voudig convergente, rij is:

¹⁾ d.m.v. dubbele contrapositie (2.7)
 St. : $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg \neg A \rightarrow \neg \neg B)$.

$$a_n = 0 \text{ voor } n < k.$$

$$a_n = k \text{ voor } n \geq k.$$

7.12: Ook het beperkt zijn van een rij $\{a_n\}$ kunnen wij positief en negatief formuleren.

$$^+\text{beperkt } \{a_n\} \stackrel{\text{D}}{=} \exists_m \forall_n [a_n \geq m].$$

$$^-\text{beperkt } \{a_n\} \stackrel{\text{D}}{=} \neg \neg \exists_m \forall_n [a_n \geq m].$$

7.13:

St. : Een positief convergente rij is positief beperkt.

Het bewijs hiervan is geheel analoog aan het klassieke.

Een negatief convergente rij behoeft niet $^+\text{beperkt}$ te zijn. Tegenvoorbeeld:

$$a_n = 0 \text{ voor } n \neq k.$$

$$a_n = n \text{ voor } n = k.$$

St. : Een negatief convergente rij is negatief beperkt.

Bewijs: Het positieve bewijs berust op de implicatie.

$$\exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a| < 2^0] \rightarrow \exists_m \forall_n [a_n \geq m].$$

Door dubbele contrapositie (7.10) volgt daaruit

$$\neg \neg \exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a| < 2^0] \rightarrow \neg \neg \exists_m \forall_n [a_n \geq m]$$

en dit levert het bewijs voor de negatieve stelling.

7.14: De verwisselbaarheid met som-, verschil- en product-
vorming zijn ook voor deze negatieve limiet te bewijzen.

St. : $\neg \lim a_n = a \wedge \neg \lim b_n = b \rightarrow \neg \lim (a_n + b_n) = a + b.$

Het triviale bewijs voor de positieve limiet berustte erop, dat voor ieder p geldt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a| < 2^{-(p+1)}] \wedge \\ & \exists_n \forall_r [|b_{n+r} - b| < 2^{-(p+1)}] \rightarrow \\ & \rightarrow \exists_n \forall_r [|a_{n+r} + b_{n+r} - (a + b)| < 2^{-p}]. \end{aligned}$$

7.15: Nu geldt voor alle wiskundige uitspraken A en B :

St. : $\neg \neg (A \wedge B) \rightarrow \neg \neg A \wedge \neg \neg B.$

Bewijs: $\rightarrow$: Gegeven $\neg \neg (A \wedge B).$

Onderstel: 1^0 : $\neg A$ en 2^0 : $(A \wedge B).$

Uit 2^0 volgt A . Dit strijdt met 1^0 .

Uit 1^0 volgt dus $\neg (A \wedge B)$. Dit strijdt met het gegeven.

Hieruit volgt dus $\neg \neg A$ en analoog $\neg \neg B$, dus ook $\neg \neg A \wedge \neg \neg B.$

$\leftarrow$: Gegeven: $\neg \neg A \wedge \neg \neg B.$

Onderstel 1^0 : A , 2^0 : B en 3^0 : $\neg (A \wedge B).$

Uit 1° en 2° volgt $A \wedge B$. Dit strijdt met 3°. Uit 2° en 3° volgt dus $\neg A$. Dit strijdt met het gegeven. Uit het gegeven en 3° volgt dus $\neg B$. Dit strijdt met het gegeven. Uit het gegeven volgt dus $\neg \neg (A \wedge B)$. Uit deze stelling volgt direct door dubbele contrapositie (7.10).

St. : $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (\neg \neg A \wedge \neg \neg B \rightarrow \neg \neg C)$.

7.16: Deze stelling, toegepast op (1) (7.14) levert:

$$\begin{aligned} & \neg \neg \exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a| < 2^{-(p+1)}] \\ & \wedge \neg \neg \exists_n \forall_r [|b_{n+r} - b| < 2^{-(p+1)}] \rightarrow \\ & \rightarrow \neg \neg \exists_n \forall_r [|a_{n+r} + b_{n+r} - (a + b)| < 2^{-p}] ; \end{aligned}$$

hierop berust het bewijs voor de negatieve somstelling.

St. : $\lim a_n = a \rightarrow \lim -a_n = -a$.

Bewijs analoog door dubbele contrapositie.

St. : $\lim a_n = a \wedge \lim b_n = b \rightarrow \lim (a_n b_n) = ab$.

Bewijs analoog aan dat voor de somstelling.

7.17: De eenduidigheid van de negatieve limiet kan met behulp van de som- en verschilstellingen bewezen worden.

St. : $\lim a_n = a \wedge \lim a_n = a' \rightarrow a = a'$.

Bewijs: Zij $\lim a_n = a$ en $\lim a_n = a'$. Dan is

$\lim (-a_n) = -a'$ (7.14) en dus $\lim (a_n - a_n) = \lim 0 = a - a'$.

Maar uit $\lim x_n = x$ en $\forall_n [x_n = 0]$ volgt $x = 0$.

Was immers $x \neq 0$, dan was er een p te bepalen, zodat $|x| > 2^{-p}$ geldt, en dan was onmiddellijk een contradictie met de gegevens te construeren.

Dus geldt $a - a' = 0$, en dus $a = a'$.

7.18: Het tegenvoorbeeld (7.2) leerde, dat we de stelling: Een monotoon niet dalende, beperkte rij convergeert, intuïtivistisch noch voor de positieve, noch ook voor de negatieve begrippen mogen affirmeren.

el geldt de stelling:

St. : Een monotoon niet dalende, negatief beperkte rij is non-oscillerend (d.w.z. voldoet aan het negatieve criterium van Cauchy), of in formules:

$$\begin{aligned} & \forall_n [a_n \geq a_{n+1}] \wedge \neg \neg \exists_m \forall_n [a_n \geq m] \rightarrow \\ & \rightarrow \forall_k \neg \neg \exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a_n| < 2^{-k}] . \end{aligned}$$

7.19: Bewijs: We willen aantonen, dat voor een willekeurige k geldt:

$$\begin{aligned} & \forall_n [a_n \not\geq a_{n+1}] \wedge \exists_m \forall_n [a_n \not\geq m] \longrightarrow \\ & \longrightarrow \neg \neg \exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a_n| < 2^{-k}] . \end{aligned}$$

De te bewijzen stelling volgt hieruit immers onmiddellijk met behulp van $(A \wedge B \longrightarrow C) \longrightarrow (\neg \neg A \wedge \neg \neg B \longrightarrow \neg \neg C)$ (7.15) en $\neg \neg \neg A \longrightarrow \neg A$.

Gegeven is dus:

$$I : \forall_n [a_n \not\geq a_{n+1}] .$$

$$II : \exists_m \forall_n [a_n \not\geq m] .$$

We mogen dus aannemen, dat deze bovengrens m_0 bekend is, en de hulponderstelling poneren

$$II^* : \forall_n [a_n \not\geq m_0] .$$

Om nu $\neg \neg \exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a_n| < 2^{-k}]$ te bewijzen gaan we de basisonderstelling:

$$III : \neg \exists_n \forall_r [|a_{n+r} - a_n| < 2^{-k}] \text{ ad absurdum voeren.}$$

III is echter equivalent (7.7. St.2) met

$$\forall_n \neg \forall_r [|a_{n+r} - a_n| < 2^{-k}] .$$

Maar altijd geldt:

$$\neg [|a_{n+r} - a_n| > 2^{-k-1}] \longrightarrow [|a_{n+r} - a_n| < 2^{-k}] .$$

Dus volgt uit (7.7. St.1)

$$\forall_r \neg [|a_{n+r} - a_n| > 2^{-k-1}] \longrightarrow \forall_r [|a_{n+r} - a_n| < 2^{-k}] \text{ F)}$$

Het succedens hiervan is equivalent (7.7. St.3) met

$$\neg \neg \exists_r [|a_{n+r} - a_n| > 2^{-k-1}] .$$

Uit III volgt dus

$$IV : \forall_n \neg \neg \exists_r [|a_{n+r} - a_n| > 2^{-k-1}]$$

en hieruit voor $n = 1$

$$IV_1 : \neg \neg \exists_r [|a_{1+r} - a_1| > 2^{-k-1}] .$$

Nu voeren we als hulponderstelling in:

$$IV_1^* : \exists_r [|a_{1+r} - a_1| > 2^{-k-1}]$$

en als tweede hulponderstelling

$$IV_1 : |a_{1+s_1} - a_1| > 2^{-k-1} .$$

Wegens I volgt uit IV_1^{**} :

$$V_1 : a_{1+s_1} - a_1 > 2^{-k-1}$$

We herhalen deze gedachtengang.

Uit IV volgt voor $n = 1 + s_1$.

$$IV_2 : \neg \neg \exists_r [|a_{1+s_1+r} - a_{1+s_1}| > 2^{-k-1}] .$$

We voeren weer de hulponderstellingen in:

$$IV_2^* : \exists_r [|a_{1+s_1+r} - a_{1+s_1}| > 2^{-k-1}]$$

en

$$IV_2^{**} : |a_{1+s_1+s_2} - a_{1+s_1}| > 2^{-k-1}$$

Wegens I volgt uit IV_2^{**} :

$$V_2 : a_{1+s_1+s_2} - a_{1+s_1} > 2^{-k-1}$$

F) en dus door contrapositie:

$$\neg \forall_r [|a_{n+r} - a_n| < 2^{-k}] \longrightarrow \neg \forall_r \neg [|a_{n+r} - a_n| > 2^{-k-1}] .$$

Dit met V, samen levert

$$VI_2: a_{1+s_1+s_2} - a_1 > 2 \cdot 2^{-k-1}.$$

We herhalen deze gedachtengang t maal met $t > 2^{k+1} \cdot (m_0 - a_1)$ en leiden zo uit $IV_1^{**}, \dots, IV_t^{**}$ af.

$$VI_t: a_{1+s_1+\dots+s_t} - a_1 > t \cdot 2^{-k-1} > m_0 - a_1$$

en daaruit:

$$a_{1+s_1+\dots+s_t} > m_0.$$

Dit geeft een contradictie met II^* .

We bewezen dus reeds, voor willekeurige m_0 , enz.:

$I \wedge II^* \wedge IV_1^{**} \wedge \dots \wedge IV_t^{**} \rightarrow \bigwedge$. (Het symbool $\bigwedge$ wordt weer als afkorting voor de afgeleide contradictie gebruikt

(2.2).) Hieruit volgt dan

$$I \wedge II \wedge IV_1^* \wedge \dots \wedge IV_t^* \rightarrow \bigwedge.$$

Daaruit volgt met behulp van (7.15)

$$I \wedge II \wedge IV_1 \wedge \dots \wedge IV_t \rightarrow \bigwedge.$$

en dus

$$I \wedge II \rightarrow III \rightarrow \bigwedge.$$

of

$$I \wedge II \rightarrow \neg III. \quad \text{q.e.d.}$$

7.20: De overgang van de theorie der oneindige rijen, met als centrale begrippen $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, naar die der oneindige reeksen, met de centrale begrippen $b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, gaat op de gewone wijze via de rij van de partiële sommen

$$s_m = \sum_{n=1}^m b_n \quad \text{en} \quad b = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m$$

7.21: De speciale convergentiekenmerken voor oneindige reeksen met positieve termen worden afgeleid door majoreren met bekende positief convergente reeksen. Zij blijven intuitionistisch gelden en leveren, positief geformuleerd, de positieve convergentie van de reeksen, waarop zij toepasselijk zijn.

7.22: Als voorbeeld hiervan gelde de stelling:

$$\text{St: } \exists_n \forall_r \left[\frac{u_{n+r+1}}{u_{n+r}} < 1 < 1 \right] \rightarrow {}^+ \text{converg. } \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Bewijs:

$$\text{Zij } \forall_r \left[\frac{u_{n_0+r+1}}{u_{n_0+r}} < 1 < 1 \right]. \quad \text{Stel } s_m = \sum_{n=1}^m u_n.$$

Dan geldt voor $\frac{n}{m+r} > n_0$:

$$s_{m+r} - s_m = \sum_{n=m+1}^{m+r} u_n < u_{n_0} \sum_{i=m+1-n_0}^{m+r-n_0} 1^i < u_{n_0} 1^{m+1-n_0} \frac{1}{1-1}.$$

Door m groot te maken is deze van r onafhankelijke bovengrens willekeurig te verkleinen. Dus geldt ${}^+ \text{Cauchy } \{s_m\}$ en dus ook (7.4, 7.20) ${}^+ \text{converg. } \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Op analoge wijze kan de geldigheid van het convergentiekenmerk van Raabe en van vele andere kenmerken aangetoond worden.

7.23: Ook het algemene convergentiecriterium van Kummer [J.E. Kummer, 1835] blijft geldig in de vorm, waarin Kummer het oorspronkelijk afgeleid heeft:

$$\text{St. : } \forall_n [u_n > 0] \wedge \forall_n [b_n > 0] \wedge {}^+ \lim b_n u_n = 0 \wedge \\ \wedge \exists_n \exists_1 \forall_r [b_{n+r} \frac{u_{n+r}}{u_{n+r+1}} - b_{n+r+1} > 1 > 0] \rightarrow \\ \rightarrow {}^+ \text{convergent } \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Bewijs:

$$\text{Zij } \forall_r [b_{n_0+r} \frac{u_{n_0+r}}{u_{n_0+r+1}} - b_{n_0+r+1} > k > 0] .$$

We laten ter vereenvoudiging van de indices de eerste n_0 termen wege krijgen dan:

$$\forall_r [b_r \cdot \frac{u_r}{u_{r+1}} - b_{r+1} > k > 0] ,$$

en dus voor alle r :

$$b_r u_r - b_{r+1} u_{r+1} > k u_{r+1} > 0 .$$

Hieruit volgt door optellen:

$$b_r u_r - b_{r+p} u_{r+p} > k(u_{r+1} + \dots + u_{r+p})$$

of:

$$\text{I : } s_{r+p} - s_r = u_{r+1} + \dots + u_{r+p} < \frac{b_r u_r}{k} .$$

Uit ${}^+ \lim b_r u_r = 0$ volgt dan direct ${}^+ \text{Cauchy} \{s_r\}$ en dus ook ${}^+ \text{convergent } \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. We kunnen ook in I de term

$b_{r+p} u_{r+p}$ niet schrappen en krijgen dan:

$$s_{r+p} - s_r = u_{r+1} + \dots + u_{r+p} < \frac{b_r u_r - b_{r+p} u_{r+p}}{k} .$$

Als we nu in plaats van ${}^+ \lim b_r u_r = 0$, veronderstellen ${}^+ \text{convergent} \{b_r u_r\}$, dan geldt ook ${}^+ \text{Cauchy} \{b_r u_r\}$ en dus ${}^+ \text{Cauchy} \{s_r\}$ en ${}^+ \text{convergent } \sum_{i=1}^{\infty} u_i$.

7.24: Klassiek kan de voorwaarde $\lim b_r u_r = 0$, zonder toevoegen van ${}^+ \text{convergent } b_r u_r$, weggelaten worden [Dini, 1867, pag. 59].

Uit I volgt dan voor $r = 1$:

$$s_p = \sum_{n=1}^p u_n < \frac{b_1 u_1}{k} .$$

De intuïtionistisch niet geldige stelling, dat een monotoon stijgende, beperkte rij convergeert, voltooit dan het bewijs.

7.25: Interessanter nog is de wijze, waarop, omdat de disjunctie "een reeks is óf convergent óf divergent" niet te affirmeren is, het door Pringsheim [A. Pringsheim, 1916, I,2, pag. 378] voor deze zelfde stelling gegeven bewijs, intuitionistisch niet geldig is.

Dit bewijs luidt:

Stel $c_n \neq 0$. Dan krijgt het gegeven de vorm:

$$\frac{u_n}{c_n} - \frac{u_{n+1}}{c_{n+1}} > ku_{n+1} > 0 \quad \text{voor ieder } n.$$

Dus geldt:

$$\frac{u_n}{c_n} > \frac{u_{n+1}}{c_{n+1}}$$

of:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Indien dus $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergent is, is de stelling bewezen.

Indien daarentegen $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ divergent mocht zijn,

stellen we $d_n = k c_n$. Het gegeven wordt dan

$$\frac{u_n}{d_n} - \frac{u_{n+1}}{d_{n+1}} > u_{n+1} > 0.$$

of:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{d_n}{d_{n+1}} > d_n > 0.$$

of II:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - d_n \left(1 + \frac{1}{d_{n+1}}\right) > 0.$$

We stellen nu: $p_1 = 1$, $p_n = (d_n + 1)p_{n-1}$.

Hieruit volgt direct: $p_n > p_{n+1}$.

$$d_n = \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}}$$

$$\text{en} \quad 1 + \frac{1}{d_{n+1}} = 1 + \frac{p_n}{p_{n+1} - p_n} = \frac{p_{n+1}}{p_{n+1} - p_n}.$$

Uitgedrukt in $\{p_i\}$ wordt II dan:

$$\text{III:} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_{n+1}}{p_{n+1} - p_n} > 0.$$

$$\text{Stel nu } a_n = \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}p_n} = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}.$$

Dan gaat III over in:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{a_n}{a_{n+1}} > 0$$

of:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Een bewijs, dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert, is dus voldoende om de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ aan te tonen. Maar

$\sum_{n=2}^m a_n = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_m}$. Dus hebben we slechts te bewijzen, dat

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p_m} = 0$ is. Dit volgt uit:

$$\sum_{i=2}^k d_i = \frac{p_2 - p_1}{p_1} + \dots + \frac{p_k - p_{k-1}}{p_{k-1}} < \frac{1}{p_1} (p_k - p_1) = p_k - 1,$$

wat geldt, daar $\{p_i\}$ monotoon toeneemt. Uit de divergentie van $\sum d_i$ volgt dus $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \infty$.

7.26: Prof. Brouwer [L.E.J. Brouwer, 1925, pag. 6] gaf een tegenvoorbeeld aan, waaruit blijkt, dat inderdaad het criterium van Kummer zonder de extra voorwaarde $\lim_{r \rightarrow \infty} b_r u_r = 0$

of $^+ \text{convergent } b_r u_r$ intuïtionistisch noch positieve, noch zelfs negatieve convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ waarborgt.

Zij $u_n \equiv_{\mathbb{D}} 2^{-n}$ voor $n \neq k$
 $u_n \equiv_{\mathbb{D}} 1$ voor $n = k$, waarbij k weer het vluchtgetal (7.2) van het rijtjesprobleem is.

Zij $b_1 \equiv_{\mathbb{D}} 4$, $b_{n+1} \equiv_{\mathbb{D}} \frac{b_n u_n}{u_{n+1}} - 1$.

Dan is $b_{n+1} u_{n+1} = b_n u_n - u_{n+1}$, $b_1 u_1 = 2$ en dus

$$b_2 u_2 = 2 - \frac{1}{4}, \quad b_3 u_3 = 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}.$$

Zo doorgaand vinden we:

$$b_{k-1} u_{k-1} = 2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \right) > \frac{1}{2} \text{ en dus:}$$

$$b_k u_k = b_{k-1} u_{k-1} - u_k > \frac{1}{2}. \text{ en verder:}$$

$$b_{k+p} u_{k+p} > \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+p}} \right) > 0.$$

Onafhankelijk van het al of niet bestaan van k zijn dus alle getallen $b_r > 0$.

Met deze getallen b_r voldoet dus de noch positief, noch negatief convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ aan het criterium van Kummer.

7.27: Absolute en onvoorwaardelijke convergentie van reeksen.

Def.: $^+ \text{absoluut convergent } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv_{\mathbb{D}} ^+ \text{convergent } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

$^+ \text{onvoorwaardelijk convergent } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv_{\mathbb{D}} ^+ \text{convergent } \sum_{k=1}^{\infty} a'_k$,

voor ieder $^+ \text{herordening}$ (bij ieder a_k moet constructief de bijbehorende a'_k te bepalen zijn en omgekeerd) $\{a'_k\}$ van $\{a_k\}$.

st. : $^+ \text{absoluut convergent } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \longrightarrow ^+ \text{onvoorwaardelijk converg } \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$

Bewijs: Ieder absoluut convergente reeks is zeker convergent.

Zij dus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Zij $\sum_{j=1}^{\infty} a'_j$ een $^+$ herordening hiervan.

Dan is voor gegeven $\epsilon > 0$ een N te vinden, zodat:

$$|s - \sum_{k=1}^N a_k| < \epsilon/2$$

en tevens:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon/2 \text{ is.}$$

Kies nu voor k het maximum van de getallen j waarvoor $a'_j = a_k$ geldt, met $k = 1, 2, \dots, N$. Dan geldt voor $m \geq N$

$$|s - \sum_{j=1}^m a'_j| < \epsilon .$$

Immers:

$$|s - \sum_{j=1}^m a'_j| \leq |s - \sum_{k=1}^N a_k| + |\sum_{k=1}^N a_k - \sum_{j=1}^m a'_j|$$

$$< \epsilon/2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|$$

Voor de implicatie:

$^+ \text{onvoorwaardelijk convergent } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \longrightarrow$

$^+ \text{absoluut convergent } \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, is noch een bewijs, noch een tegenvoorbeeld bekend.

7.23: Uit de praemissen $^+ \text{convergent } \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ en

$^+ \text{beperkt } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ kunnen wij niet concluderen:

$^+ \text{onvoorwaardelijk convergent } \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Tegenvoorbeeld:

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \dots$$

De n^{de} groep bestaat uit 2^{n-1} termen, ieder absoluut gelijk aan $2^{-(n-1)}$ en om beurten met positief en negatief teken voorzien, indien de n^{de} decimaal van $\sqrt{2}$ niet de laatste 7 uit het eerste rijtje van zeven 7's is. Indien dit wel het geval mocht zijn, nemen we voor de termen van de n^{de} groep de absolute waarde $2^{-(n-1)}$ en weer wisselend teken.

De som van $|a_k|$ over de n^{de} groep is dan $2^{n-1} \cdot 2^{-(n-1)} = 2^{-(n-1)}$, indien n geen zeven 7's getal is, en $2^{n-1} \cdot 2^{-(n-1)} = 1$, indien dit wel het geval is.

Indien geen zeven 7's getal voorkomt, convergeert dus $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ tot de som 2. In ieder geval is $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ $^+ \text{beperkt}$.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ is in ieder geval $^+ \text{convergent}$ naar 1.

Van $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ kunnen we echter de positieve convergentie

niet affirmeren, indien we voor $\{a_k\}$ de herordening

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \dots$$

kiezen, welke ontstaat, als we eerst de positieve termen van de eerste groep opschrijven, dan de eerste overgeslagen negatieve term, dan de positieve termen uit de tweede groep en de tweede overgeslagen term, en zo voortgaan.

De mogelijk voor onbepaald hoge n voorkomende n^{de} groep positieve termen, waarvoor n een zeven 7's getal is, heeft de som $2^{n-2} \cdot 2^{-(n-1)} = \frac{1}{2}$. We kunnen dus niet zeggen, dat de reeks aan het positieve criterium van Cauchy voldoet, en dus evenmin, dat hij positief convergeert.

7.29: De herordeningsstelling van Riemann [M.J. Belinfante, 1938].

St.: Indien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $^{+}$ convergent is, maar $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ $^{+}$ divergent, dan is bij ieder reëel getal t een herordening $\{a'_k\}$ van de rij $\{a_k\}$ te vinden, zodat in de zin van positieve convergentie $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = t$ geldt. Hierbij gebruiken we de definitie:

Def.: $^{+}$ divergent $\sum_{i=1}^{\infty} u_i \bar{\forall} p \exists N \forall n \geq N [|\sum_{i=1}^n u_i| < p]$.

Bewijs: Het klassieke bewijs moet op drie punten aangevuld worden om intuitionistisch bruikbaar te zijn:

1^o: De $^{+}$ divergentie van de deelreeks der positieve termen en van die der negatieve termen moet positief bewezen worden.

2^o: Niet van ieder term a_k hoeft uit te maken te zijn, of deze positief, dan wel negatief, of 0 is.

3^o: Niet van ieder geconstrueerde partiële som hoeft uit te maken te zijn, of deze het gegeven getal t overtreft, of niet.

2^o en 3^o leveren weinig moeilijkheden, omdat de beschouwde getallen dan toch zeer dicht bij 0, of bij t gelegen zijn.

Voor gegeven $\varepsilon > 0$ en ieder k geldt minstens één, misschien twee, van de volgende uitspraken:

$$a_k < 0, \quad a_k > 0 \quad \text{of} \quad |a_k| < \varepsilon \cdot 2^{-k}.$$

We kunnen dus voor iedere $\varepsilon > 0$, de termen van de reeks, soms met willekeur, verdelen in een rij positieve, een rij negatieve en een rij uitzonderingstermen.

Noem nu: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{D} s, \quad \sum_{k=1}^n a_k \bar{D} s_n, \quad \sum_{k=1}^n |a_k| = S_n,$

$$\sum_{k=1}^n a_k \bar{D} s'_n, \quad \sum_{k=1}^n a_k \bar{D} -s'_n, \quad \sum_{k=1}^n a_k \bar{D} c_n, \quad \sum_{k=1}^n |a_k| \bar{D} \cdot 2_n,$$

[R. Courant, 1934, Vol. I, pag. 374]

waarbij de sommen Z^I , Z^II en Z^{III} respectievelijk alleen over de positieve, de negatieve en de uitzonderingstermen worden uitgestrekt. Zeker geldt dan $Z_n < \varepsilon$ en dus ook $|G_n| < \varepsilon$.

Kies nu een groot getal $\alpha > 0$ en bepaal $m(\alpha, \varepsilon)$, zodat voor $n \geq m(\alpha, \varepsilon)$ zowel $|s - s_n| < \varepsilon$, als ook

$s_n > \alpha$ geldt. Beschouw nu voor $n \geq m(\alpha, \varepsilon)$:

$$|s - s_n| = |s - s_n^I + s_n^II - G_n| < \varepsilon. \text{ Dus geldt:}$$

$$|s_n^I - s_n^{II}| < |s| + |G_n| + \varepsilon < |s| + 2\varepsilon. \text{ Maar:}$$

$$s_n = s_n^I + s_n^{II} + Z_n > \alpha \text{ en dus: } s_n^I + s_n^{II} > \alpha - \varepsilon.$$

$$\text{Dus: } 2s_n^I > \alpha - |s| - 3\varepsilon.$$

$$2s_n^{II} > \alpha - |s| - 3\varepsilon.$$

Dus zijn zowel de deelreeksen der positieve, als die der negatieve termen $\div$ divergent.

De gezocht $\div$ herordening $\{a_k^I\}$ bepalen wij nu als volgt:

Kies voor $a_1^I, a_2^I, a_3^I, \dots$ de positieve termen van $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in de natuurlijke volgorde, zolang $\sum_{i=1}^q a_i^I < t$ is. Ook,

indien het onbekend is, of $\sum_{i=1}^q a_i^I < t$ is, maar wel bekend, dat $\sum_{i=1}^q a_i^I > t + \varepsilon$ is, voegen we nog positieve termen toe,

zolang onbekendheid en ongelijkheid gelden. Na de laatst gekozen positieve term a_{p_1} schrijven we de eerste uitzonderingsterm - zo deze bestaat - welke in $\{a_k\}$ voor a_{p_1} staat.

Voor de nu bereikte partiële som t_{n_1} geldt:

$$|t - t_{n_1}| > |a_{p_1}| + 2\varepsilon^1.$$

We herhalen deze toevoeging met negatieve termen en schrijven, wanneer we met laatste negatieve term a_{p_2} zeker t gepasseerd zijn, weer één uitzonderingsterm achter de partiële som. Voor de dan bereikte partiële som t_{n_2} geldt weer:

$$|t - t_{n_2}| > |a_{p_2}| + 2\varepsilon.$$

Afwissellend op deze wijze positieve, negatieve en uitzonderingstermen toevoegend gaan we door tot $a_{p_{s_1}}$ en alle nog ongebruikte termen in absolute waarde $< \varepsilon^{p_{s_1}}$ zijn. Dan geldt dus $|t_{n_{s_1}} - t| < 3\varepsilon$.

Nu herhalen we dit gehele proces met de overgebleven termen, maar met $\frac{\varepsilon}{2}$ i.p.v. ε (ook bij het bepalen van de uitzonderingstermen): Dan geldt voor alle $n \geq n_{s_1}$ gedurig $|t_n - t| < 3\varepsilon$. Na het beëindigen van het tweede proces en voor $n \geq n_{s_2}$ geldt dan weer $|t_n - t| < 3\varepsilon/2$.

Iteratie met $\varepsilon/4, \varepsilon/8, \dots$ levert dus een $\div$ herordening $\{a_k^I\}$ op, waarvoor $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^I$ positief tot t convergeert.

§ 8 : Enkele Opmerkingen over Continue Functies.

8.1 : De definities van "continu in een punt x_0 " en "continu in een interval" zijn intuïtionistisch geheel als in de klassieke wiskunde te geven.

De stellingen, dat een continue functie van een continue functie - dat som, verschil, product en quotiënt van continue functies - weer continu zijn, zijn ook op de gewone manier te bewijzen, indien we de bijvoorwaarde, dat de deler $g(x) \neq 0$ is, vervangen door $g(x) \neq 0$.

8.2 : Een van de eerste klassieke stellingen, waarvan het intuïtionistische analogon niet geldt, is de tussenwaardestelling.

Tegenvoorbeeld: Zij $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{4}) = a$, $f(\frac{3}{4}) = a$, $f(1) = 1$ en $f(x)$ lineair verlopend tussen de vier aangegeven waarden. Dan is voor ieder reëel getal a de functie $f(x)$ voor alle x uit $[0,1]$ gedefinieerd (d.w.z. willekeurig nauwkeurig te bepalen) en continu. We kiezen nu voor a een om 0 zwevend getal. Er is dan geen waarde $x_0 \in [0,1]$ aan te geven, waarvoor $f(x_0) = 0$ is. Immers indien $a < 0$ is, zou $x_0 < \frac{1}{4}$ moeten zijn; indien $a > 0$ is, zou $x_0 > \frac{3}{4}$ moeten zijn. Zolang nog over de ordening van a en 0 niets bekend is, is dus x_0 niet te bepalen.

8.3 : Direct in te zien is de volgende stelling:

St. : Iedere, in een zeker interval voor ieder reëel getal uit dat interval gedefinieerde, (z.g. "volle") functie $f(x)$ is in dat interval continu.

Bewijs: (zie ook 14.3 en 14.4) Onder de reële getallen x , waarvoor $f(x)$ willekeurig nauwkeurig te bepalen moet zijn, zijn ook die reële getallen, welke door een keuzereeks gegeven zijn. Voor een dergelijk getal x kunnen we wel iedere n zijn n^{de} voortbrengende interval aangeven, maar we hebben geen overzicht over de totaliteit van alle intervallen van x . Ook naast ieder reëel getal x , waarvan de intervalrij A_i door een wet bepaald wordt, kunnen we ons een keuzerij van intervallen gegeven denken, welke dit zelfde getal bepaalt. Hiervoor kunnen wij bijvoorbeeld die keuzerij gegeven denken, waarvan we steeds bij de i^{de} intervalkeuze merken, dat hij het interval A_i levert, zonder dat wij van te voren weten, dat dit altijd het geval moet zijn.

Onze bepaling-op- ϵ -na van $f(x_0)$ moet dus geschieden op grond van onze kennis van het n^{de} interval van x_0 (lengte δ_n) voor zekere van ϵ afhankelijke n en moet dus gelden

voor alle mogelijke voortzettingen van deze deelrij der eerste n intervallen van x_0 . Bij alle punten x' in een zekere $\delta'_n(\varepsilon)$ -omgeving van x_0 behoren dus waarden $f(x')$ in de gegeven ε -omgeving van $f(x_0)$.

8.4 : Evenmin als we in (8.2) de mogelijkheid hadden een x_0 te bepalen, zodat $f(x_0) = 0$ gelden zou, evenmin kunnen we bij een willekeurige, in een afgesloten interval $[a, b]$ continue functie $f(x)$, steeds een punt x_m uit $[a, b]$ aangeven, zodat $f(x_m)$ de maximale waarde van $f(x)$ in $[a, b]$ is. Van twee relatieve maxima behoeft namelijk niet uit te maken te zijn, welke van de twee de grootste waarde levert.

Een eenvoudig tegenvoorbeeld wordt daarom reeds geleverd door: $f(x) = -3x^4 + 4cx^3 + 6x^2 - 12cx$.
 $f'(x) = -12x^3 + 12cx^2 + 12x - 12c =$
 $= -12(x - c)(x + 1)(x - 1)$.

Extrema dus voor $x = \pm 1$ en $x = c$. De waarden hiervoor zijn resp. $3 - 8c$, $3 + 8c$, $c^4 - 6c^2$.

Kiezen we voor c een om 0 zwevend getal, dan is niet uit te maken, welke van de twee relatieve maxima $3 - 8c$ en $3 + 8c$ het grootste is, en dus ook niet of het maximum in $+1$ of in -1 wordt aangenomen.

Wel is hierde maximale waarde $3 + 8|c|$ te bepalen.

8.5 : Dit laatste is een bijzonder gevan van de intuitionistisch wel te bewijzen stelling:

St.: Bij iedere in een afgesloten interval $[a, b]$ continu gedefiniëerde functie $y = f(x)$ is de kleinste bovengrens Y van de verzameling W der door $y = f(x)$ in $[a, b]$ aangenomen waarden te bepalen.

Voor het bewijs hiervan maken we gebruik van de intuitionistisch geldige stelling, dat iedere in een afgesloten interval $[a, b]$ continu gedefiniëerde functie (dus (8.3) iedere in $[a, b]$ volle functie) in $[a, b]$ gelijkmatig continu is. Het klassieke bewijs voor deze stelling kan intuitionistisch niet gehandhaafd worden. Het intuitionistische bewijs vereist veel dieper liggende hulpmiddelen en wordt daarom eerst aan het einde van dit college gegeven.

Bewijs: Gegeven zij dus: $y = f(x)$ is in $[a, b]$ gelijkmatig continu, d.w.z.

$$\forall n \exists p_n \forall x_1, x_2 [|x_1 - x_2| < 2^{-p_n} \rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < 2^{-n-2}] .$$

Overdek nu voor gegeven n het interval $[a, b]$ met een eindig aantal K_n deelintervallen $I_{n,k}$ van de lengte 2^{-p_n} . Noem het linker eindpunt van $I_{n,k}$ nu $x_{n,k}$ en stel

$y_{n,k} \in f(x_{n,k})$. Dan ligt het gehele beeld van $I_{n,k}$ binnen een interval $J_{n,k}$ van de lengte 2^{-n-1} met $y_{n,k}$ als middelpunt.

Zij $y_n = \max_{k=1, \dots, K_n} y_{n,k}$.

$$M_n = y_n + 2^{-n-1}, \quad m_n = y_n - 2^{-n-1}.$$

Dan geldt voor ieder n zowel

I: $\forall x \in [a, b] [f(x) < M_n]$, als

II: $\exists x \in [a, b] [f(x) > m_n]$.

Bovendien is $|y_{n+1} - y_n| < 2^{-n-2}$, en dus $m_n < m_{n+1}$ en $M_{n+1} < M_n$. De intervallen (m_n, M_n) vormen daarom een inkrimpande, convergente rij en bepalen dientengevolge een reëel getal $Y = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$.

Wegens I is Y een bovengrens van W , wegens II is ieder getal kleiner dan Y geen bovengrens van W .

§ 9 : Verzamelingen, Spreidingen en Soorten.

9.1 : Een verzameling kan op twee geheel verschillende wijzen bepaald worden, namelijk

1^o: Door het achtereenvolgens opnoemen en construeren van haar elementen (vb.: de verzameling van de natuurlijke getallen).

2^o: Door het aangeven van een karakteristieke eigenschap, waardoor, uitgaande van een bepaald reeds geconstrueerd gebied van elementen, sommige van deze elementen als tot de verzameling behorend, andere als niet tot de verzameling behorend gekenmerkt worden (vb.: de verzameling van de priemgetallen).

Prof. L.E.J. Brouwer heeft een principiëel onderscheid gemaakt tussen deze beide wijzen om een verzameling te bepalen.

Een op de eerste wijze voortgebrachte verzameling noemen we nu, dit woord voortaan in deze engere zin gebruikend, een "verzameling".

Een op de tweede wijze voortgebrachte verzameling een "soort" (Spezies, species, espèce).

9.2 : Verzamelingen.

Een achtereenvolgens construeren van de elementen van een verzameling kan in strenge zin slechts dan voltooid worden, indien de verzameling eindig is. Voor een oneindige

verzameling kunnen wij alleen de gemeenschappelijke ontstaanswijze aangeven, zoals bijvoorbeeld bij de verzameling van de natuurlijke getallen. Uitgaande van deze verzameling van de natuurlijke getallen kunnen we nieuwe gemeenschappelijke ontstaanswijzen aangeven voor verzamelingen van andere elementen.

De tot nu toe in de wiskunde belangrijke gemeenschappelijke ontstaanswijzen zijn tot vaste schemata terug te brengen. Het eerste hiervan behandelen we in de volgende paragraaf, een tweede in § 9.9.

9.3 : Spreidingen.

Een volgens dit schema voortgebrachte verzameling noemen wij een spreiding (ook: Menge, Brouwerian Set, spread, déploiement). Een spreiding wordt bepaald door twee wetten:

1^o: de Spreidingswet S.

Deze bepaalt:

α : uit welke (eindig of oneindig veel) natuurlijke getallen het getal a_1 gekozen mag worden-

β : bij gegeven $(a_1, \dots, a_n)$ uit welke natuurlijke getallen het getal a_{n+1} gekozen mag worden. Op deze $(n+1)^{ste}$ trede kan een keuze uit een eindige, of uit een oneindige, maar indier $(a_1, \dots, a_n)$ zelf door S toegelaten keuzen zijn, nooit uit een lege soort van natuurlijke getallen toegelaten zijn.

2^o: de Toevoegingswet T

Deze voegt aan iedere eindige rij $(a_1, \dots, a_n)$ van volgens S gekozen natuurlijke getallen een mathematisch object P_n uit één of andere van te voren geconstrueerde verzameling toe. (Zonder verlies van algemeenheid kunnen we veronderstellen, dat P_n alleen van a_n afhankelijk is.)

De Spreiding $Z = Z(S, T)$ heeft tot elementen alle op deze wijze voortgebrachte oneindige rijen $(P_1, P_2, P_3, \dots)$.

9.4 : Voorbeelden van Spreidingen.

I: S_I bepaalt, dat op iedere trede ieder natuurlijk getal als a_n gekozen mag worden.

T_I voegt aan $(a_1, \dots, a_n)$ het natuurlijke getal a_n toe

Z_I heeft dus als elementen alle oneindige keuzerijen van natuurlijke getallen.

II: S_{II} als S_I .

T_{II} voegt aan $(a_1, \dots, a_n)$ het laatste cijfer van a_n toe.

Z_{II} heeft als elementen alle oneindige keuzerijen van cijfers en brengt dus, wanneer we iedere rij, waarin op een

cijfer $c \neq 9$ slechts cijfers 9 volgen, met de rij identificeren, waarin $c+1$ staat op de plaats van c , gevolgd door een oneindige rij van cijfers 0, de verzameling van alle decimale breuken x met $0 \leq x \leq 1$ voort.

III: S_{III} bepaalt voor iedere n , dat a_n uit de getallen $(0,1,\dots,9)$ gekozen mag worden.

T_{III} als T_I .

Σ_{III} heeft dezelfde elementen als Σ_{II} . Twee spreidingen, welke dezelfde elementen bevatten, kunnen dus door verschillende wetten-paren (S_{II}, T_{II}) en (S_{III}, T_{III}) voortgebracht worden.

IV: Het is op vele eenvoudige wijzen mogelijk de rationale intervallen (paren rationale getallen, d.w.z. zestallen natuurlijke getallen) eventueel met herhalingen af te tellen. Zij een dergelijke aftelling $i_1, i_2, i_3, \dots$. De relaties $i_n \subseteq i_m$, lengte $i_n \leq$ lengte i_m , i_m raakt $[0,1]$, zijn dan als relaties tussen m en n te formuleren.

Nu bepalen we:

$S_{IV} : \alpha : a_1$ mag gekozen worden uit alle natuurlijke getallen m , waarvoor i_m aan $[0,1]$ raakt.

$\beta : a_{n+1}$ mag bij gegeven $(a_1, \dots, a_n)$ gekozen worden uit alle natuurlijke getallen m , waarvoor:

$$1^0: i_m \subseteq i_{a_n}.$$

$$2^0: \text{lengte } i_m \leq \frac{1}{2} \text{ lengte } i_{a_n}.$$

$$3^0: i_m \text{ raakt } [0,1].$$

T_{IV} voegt aan $(a_1, \dots, a_n)$ toe i_{a_n} .

Σ_{IV} bevat als elementen alle met de voorgeschreven snelheid in lengte naar 0 convergerende, inkrimpende intervalrijen, welke $[0,1]$ raken.

In deze spreiding komen natuurlijk vele paren intervalrijen $\alpha = \{i_n\}$ en $\alpha' = \{i_{a_n}\}$ voor, welke voldoen aan $\forall n [i_{a_n} \approx i_{a_n}]$, en dus gelijke reële getallen bepalen. Na identificatie van dergelijke paren kunnen we Σ_{IV} beschouwen als een voorstelling van het continuüm der reële getallen x met $0 \leq x \leq 1$. Dat van te voren de convergentie-snelheid der intervalrijen door $i_{a_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \text{ lengte } i_{a_n}$ vastgelegd is, is van geen belang, omdat ieder reëel getal ook door een dergelijke met vaste snelheid convergerende intervalrij gerepresenteerd kan worden.

Veranderen we S_{IV} door aan de eisen, aan de keuze van a_1 en a_{n+1} gesteld, nog nieuwe eisen toe te voegen, dan verkrijgen wij een deelspreiding Σ'_{IV} van Σ_{IV} .

Voegen we zoveel nieuwe eisen toe, dat a_1 en a_n

eenduidig bepaald zijn, dan krijgen we een deelspreiding Σ_{IV}' van Σ_{IV} , welke slechts één, door die eisen bepaald, element van Σ_{IV} bevat.

Kiezen we op iedere trede één van de door S_{IV} toegelaten getallen, dan krijgen we een, door deze keuzerij bepaald, element van Σ_{IV} .

Het invoeren van spreidingen en van de daarin door keuzerijen bepaalde elementen - welke men zich dus als door de groeiende rij van keuzen steeds nauwkeuriger bepaald moet denken - overwint de moeilijkheden, welke de Franse half-intuitionisten bij de constructieve opbouw van het continuüm ondervonden. Er is immers met behulp van een eindig aantal tekens maar een aftelbare rij van wetten door eindige sequenties hiervan te formuleren. Hieruit volgt, dat er slechts aftelbaar veel, individueel door eindige wetten bepaalde, reële getallen zijn aan te geven, terwijl toch de verzameling van alle reële getallen niet aftelbaar kan zijn. Dit werd als paradoxaal ondervonden.

Een keuzerij (zelf steeds onaf, maar onbepaald voort te zetten) van door de spreidingswet S toegelaten natuurlijke getallen bepaalt het toegevoegde element uit Σ , dus bijv. het toegevoegde reële getal, ook alleen, als een onaf blijvende, wordende entiteit.

V: Vervangen wij in S_{IV} α en β de eis " i_m raakt $[0,1]$ " door " $i_m \subseteq (0,1)$ ", (respectievelijk: laten wij deze eis weg) dan verkrijgen we een spreiding Σ_{IV}^* , waarvan de elementen na identificatie, de reële getallen x uit $(0,1)$ voorstellen (respectievelijk: ... een spreiding Σ_{IV}^{**} ... alle reële getallen voorstellen).

Spreidingen Σ en die entiteiten $\mathfrak{G}$, die als elementen ervan beschouwd zouden kunnen worden, kunnen geheel onafhankelijk van elkander geconstrueerd worden. Daarna kan vastgesteld worden, dat $\mathfrak{G} \in \Sigma$ is. Een voorbeeld hiervan is het door een wet bepaalde getal $\mathfrak{N}$ en de spreiding van alle reële getallen. Ook kan het voorkomen, dat na de constructie van de spreiding Σ een element $\mathfrak{G}$ van Σ door een S toegelaten keuzerij bepaald wordt. Van een dergelijke $\mathfrak{G}$ staat dus van te voren $\mathfrak{G} \in \Sigma$ vast.

9.5 : Finiëte Spreidingen.

Def.: Een spreiding Σ is finiet (bounded spread, finitary spread, fan), indien de spreidingswet S van Σ voor ieder natuurlijk getal n bij gegeven, toegelaten $(a_1, \dots, a_{n-1})$ een keuze van a_n uit een eindige soort van natuurlijke getallen

toelaat.

Opmerkingen: 1^o: Voor iedere n (ook voor $n = 1$) en iedere toegelaten $(a_1, \dots, a_{n-1})$ moet de keuze-soort eindig zijn. Het behoeft geenszins mogelijk te zijn een van n en $(a_1, \dots, a_{n-1})$ onafhankelijke bovengrens voor het aantal elementen van alle keuzesoorten aan te geven.

Deze opmerking heeft weinig principiële betekenis, omdat een gegeven finiete spreiding zelfs altijd door een spreiding, waarbij de keuzeverzamelingen steeds 1 of 2 elementen bevatten, vervangen kan worden.

2^o: "Eindig" betekent in de definitie "een eindig, voor iedere n en $(a_1, \dots, a_{n-1})$ vast, aantal elementen bevattend", niet slechts "een aantal elementen beneden een zeker eindig getal bevattend".

9.6 : St.: Een afgesloten rationaal interval $[c, d]$ valt met een finiete spreiding Σ samen (d.w.z. Σ is te bepalen, zodat ieder element van $[c, d]$ met minstens één element van Σ en wederkerig ieder element van Σ met minstens één element van $[c, d]$ samenvalt).

Bewijs: We definiëren λ_n -intervallen als intervallen

$$(a \cdot 2^{-n-1}, (a+2) \cdot 2^{-n-1})$$

met gehele a . Zij hebben dus de lengte 2^{-n} en liggen dakpansgewijs over elkaar.

μ_n -intervallen ontstaan uit λ_n -intervallen, door van deze laatste links en rechts $1/8$ van de lengte af te nemen. Zij hebben dus de vorm

$$(a \cdot 2^{-n-1} + 2^{-n-3}, (a+2) \cdot 2^{-n-1} - 2^{-n-3}) \text{ en de lengte } 3 \cdot 2^{-n-2}.$$

We beschouwen achtereenvolgens de $\mu_0, \mu_3, \mu_6, \dots$ -intervallen, welke $[c, d]$ raken. Ieder rationaal interval van een lengte $\leq 2^{-3n-3}$ is in minstens één μ_{3n} -interval bevat.

Speciaal: ieder μ_{3n+3} -interval ligt in minstens één μ_{3n} -interval en is daar bovendien in engere zin in bevat (d.w.z. is er in bevat en heeft er geen eindpunten mee gemeen).

In ieder μ_{3n} -interval liggen hoogstens elf μ_{3n+3} -intervallen, welke $[c, d]$ raken. Er zijn slechts eindig veel

μ_0 -intervallen te vinden, welke $[c, d]$ raken. De spreiding Σ van de μ_{3n} -intervalschakelingen, welke $[c, d]$ raken, is dus zeker finiet. Ieder element van Σ valt samen met een reëel getal α met $\alpha \in [c, d]$. Andersom is ook iedere $\alpha \in [c, d]$ door een element van deze spreiding voor te stellen. Zij α immers gerepresenteerd door een intervalrij

$\alpha = \{A_n\}$. Dan is er een ν te bepalen, zodat lengte $A_\nu \leq 1/8$, en dus ook één of meer μ_0 -intervallen, waar A_ν in ligt. Deze raken $[c,d]$, omdat A_ν dit doet. Noem het meest linkse ervan B_0 . Op dezelfde wijze is uit een A_ν met lengte $A_\nu \leq 2^{-3n-3}$ een μ_{3n} -interval B_n te bepalen, zodat $A_\nu \subseteq B_n$ is.

De in engere zin inkrimpemde intervalrij $\beta = \{B_n\}$ valt dan met $\alpha = \{A_n\}$ samen.

Opmerking: Voor een open interval (c,d) geldt deze stelling niet.

Uit de mogelijkheid een afgesloten interval met een finiete spreiding te overdekken, kunnen conclusies afgeleid worden, analoog aan diegene, welke in de klassieke wiskunde uit de overdekkingsstelling van Heine-Borel volgen.

9.7 : Ook de gelijkmatig continue functies op het eenheidscontinuüm $[0,1]$ zijn als elementen van een spreiding, welke in dit geval niet finiet is, te beschouwen [Brouwer, 1942].

De gelijkmatige continuïteit van een functie $f(x)$ is immers te formuleren als:

$$\forall n \exists p(n) \forall x_1, x_2 \in [0,1] [|x_1 - x_2| < 2^{-p(n)} \longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < 2^{-n-2}] .$$

Het beeld van een $\lambda_{p(n)}$ -interval op de x -as heeft dus een lengte $< 2^{-n-2}$ en valt dus binnen minstens één

λ_n -interval op de y -as. Zo bepaalt de functie $f(x)$ een arithmetische functie $p(n)$ en een toevoeging aan de $\lambda_{p(n)}$ -intervallen op de x -as van λ_n -intervallen op de y -as.

De gelijkmatig continue functies $f(x)$, gedefinieerd op het eenheidscontinuüm $[0,1]$ vormen nu een spreiding, waarvan de spreidings- en toevoegingswetten (voor het gemak gezamenlijk geformuleerd) er als volgt uitzien:

1ste trede: Kies een natuurlijk getal $p(1)$ (bij deze keuze, en evenzo bij de keuzen van $p(2), \dots$ zijn oneindig veel mogelijkheden; daarom reeds is de spreiding niet finiet).

Kies bij ieder van de $\lambda_{p(1)}$ -intervallen, welke $[0,1]$ raken ($2^{p(1)+1} + 3$ in aantal) een λ_1 -interval op de y -as, en wel zodanig, dat door deze keuze aan twee elkan- der rakende $\lambda_{p(1)}$ -intervallen op de x -as twee elkander rakende λ_1 -intervallen op de y -as toegevoegd worden.

De totaliteit van deze eindig veel keuzedaden op de eerste trede kan door de keuze van één natuurlijk getal a_1 uit een oneindige soort (bijvoorbeeld van

$a_1 = 2^{p(1)} \cdot 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \dots \prod_{q+1}^{\alpha_q}$, waarbij π_k het k^{de} priemgetal is, $q = 2^{p(1)+1} + 3$ en α_v het natuurlijke getal is, dat de keuze van het aan het v^{de} $\lambda_{p(1)}$ -interval toegevoegde λ_1 -interval bepaalt) vastgelegd gedacht worden.

2^{de} trede: Kies een natuurlijk getal $p(2) > p(1)$.

Kies bij ieder $\lambda_{p(2)}$ -interval op de x-as een λ_2 -interval op de y-as, zodat:

1^o: aan twee elkander rakende $\lambda_{p(2)}$ -intervallen twee elkander rakende λ_2 -intervallen toegevoegd worden.

2^o: indien een $\lambda_{p(2)}$ -interval bevat is in een $\lambda_{p(1)}$ -interval, het toegevoegde λ_2 -interval ook in het toegevoegde λ_1 -interval bevat is.

3^{de}, 4^{de}, 5^{de}, ... trede: analoog aan de 2^{de} trede.

De functie $f(x)$ wordt dus, in een tekening gezien, bepaald door een keuzerij van tot banden aaneengeschakelde rechthoeken. . . Iedere volgende band is hierbij in de vorige band bevat. De rechthoekjes ervan hebben de halve hoogte en een $2^{-(p(i+1)-p(i))}$ maal zo grote breedte als die van de vorige band.

Aan ieder punt x_0 op de x-as (ook als keuzerij van λ_n -intervallen voor te stellen) is nu door de rij banden een inkrimpende rij λ_n -intervallen op de y-as, dus een punt y_0 op de y-as toegevoegd.

Wordt x_0 door meer dan één intervalrij voorgesteld, dan raken de intervallen van de toegevoegde rijen elkaar voor iedere n en bepalen dus een zelfde punt y_0 .

Soorten .

9.8 : Een soort S van de eerste orde over een verzameling V wordt bepaald, door uitgaande van die reeds geconstrueerde verzameling V. (bijvoorbeeld een spreiding of een verzameling als de verzameling $\mathbb{N}_n$ van de natuurlijke getallen) een karakteristieke eigenschap $E(x)$ aan te geven, waarvan het gelden, of niet gelden voor de elementen van V een wiskundige betekenis heeft. Elementen van S zijn dan alle elementen van V, waarvoor $E(x)$ geldt.

Het behoeft hierbij in geen dele voor ieder element x van V uit te maken te zijn, of $E(x)$ geldt of niet.

Vb. : Zij V de verzameling van de natuurlijke getallen, $\mathbb{N}_n$, en S de soort van de Fermat-exponenten, dat wil zeggen, de soort van de natuurlijke getallen, waarvoor geldt:

$$E_S(n) \equiv \exists x, y, z \in \mathbb{N}_n [x^n + y^n = z^n] .$$

Bij deze soort S is geen methode bekend om voor een willekeurige $n \in \mathbb{N}_n$ uit te maken of $n \in S$, dan wel $\neg (n \in S)$ geldt.

Om een soort S van de eerste orde over V te definiëren, is het dus noodzakelijk, dat de verzameling V reeds geconstrueerd is, d.w.z., dat de gemeenschappelijke ontstaanswijze van de elementen x van V aangegeven is, niet, dat ieder element van V of van S individueel reeds geconstrueerd is. Zijn x en S beide geconstrueerd, dan kan men de vraag stellen, of $x \in S$, d.w.z. $E(x)$ geldt.

De verzameling van alle elementen van een spreiding Z (en algemener van een verzameling V) vormt natuurlijk zelf ook een soort. Om deze te bepalen, behoeven we slechts voor $E(x)$ de eigenschap te nemen, element van Z te zijn.

9.9 : De in de vorige paragraaf gekenschetste constructiemethode van soorten S van de eerste orde over een gegeven verzameling V kunnen we beschouwen als een nieuwe gemeenschappelijke ontstaanswijze van mathematische entiteiten. Dit geeft ons het recht om van de verzameling $V_1 = \mathcal{P}(V)$ van alle soorten van de eerste orde over V te spreken.

Uitgaande van deze verzameling V_1 (of ook van de vereniging van V_1 met V , of met andere reeds geconstrueerde verzamelingen) kunnen we nu weer dezelfde constructiemethode toepassen. Dit levert ons soorten van de eerste orde over V_1 , waarvan dus soorten van de eerste orde over V (en eventueel ook elementen van V) element kunnen zijn.

Soorten van de eerste orde over V_1 noemen we nu soorten van de tweede orde over V .

Deze constructiemethode voor soorten van de eerste orde over V_1 , kunnen we nu als een gemeenschappelijke ontstaanswijze van alle soorten van de tweede orde over V beschouwen. We kunnen daarom over de verzameling $V_2 = \mathcal{P}(V_1) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(V))$ hiervan spreken, en hierin weer soorten van de derde orde over V vormen.

Herhalend krijgen we zo voor iedere $n \in \mathbb{N}_n$ een verzameling V_n van soorten van de n^{de} orde over V . Deze laatste kunnen dus alleen soorten van de orde $(n-1)$ over V (of van orde m over V met $m < n$) als elementen hebben.

Dat een soort zichzelf als element zou hebben is dus een absurde uitspraak. Doordat op deze wijze slechts soorten uit reeds geconstrueerde verzamelingen gevormd worden, kunnen geen paradoxen optreden.

Inclusierelaties tussen Soorten.

9.10: Zijn S_1 en S_2 soorten over dezelfde verzameling V , dan definiëren wij:

S_1 is sterk bevat in S_2 $\bar{D}$ $S_1 \subseteq S_2 \bar{D}$
 $\bar{D} \bigvee_{x \in V} [x \in S_1 \rightarrow x \in S_2]$.

S_1 is zwak bevat in S_2 $\bar{D}$ $S_1 \subseteq_z S_2 \bar{D}$
 $\bar{D} \rightarrow \exists x \in V [x \in S_1 \wedge \neg (x \in S_2)]$.

Natuurlijk gelden: $S_1 \subseteq S_2 \rightarrow S_1 \subseteq_z S_2$ en alle gewone eigenschappen van de inclusierelatie.

Op grond van deze inclusierelatie definiëren we nu:

S_1 is identiek met S_2 $\bar{D}$ $S_1 = S_2 \bar{D} S_1 \subseteq S_2 \wedge S_2 \subseteq S_1$.

S_1 is congruent met S_2 $\bar{D}$ $S_1 =_z S_2 \bar{D} S \subseteq_z S_2 \wedge S_2 \subseteq_z S_1$.

Twee klassiek identieke soorten kunnen intuïtionistisch congruent en niet identiek zijn. Een voorbeeld hiervan is:

Zij V de verzameling (een spreiding) van alle oneindige rijen opgebouwd uit de cijfers 0 en 1, zij S_1 de soort van alle elementen x van V , waarvoor óf x geen cijfer 1 bevat, óf in x na een eindig aantal cijfers 0 een cijfer 1 te vinden is (dus S_1 is de soort van alle $x \in V$, waarvoor uit te maken is of x een cijfer 1 bevat of niet), zij S_2 gelijk aan S_1 met verwisseling van 0 en 1, zij S_3 de soort van alle elementen V .

Klassiek geldt dan zeker $S_1 = S_2 = S_3$. Intuïtionistisch geldt natuurlijk $S_1 \subseteq S_3$ en $S_2 \subseteq S_3$, maar we kunnen niet beweren, dat $S_3 \subseteq S_1$, $S_3 \subseteq S_2$, $S_1 \subseteq S_2$, $S_2 \subseteq S_1$ gelden. Wel geldt zeker $S_1 =_z S_3 =_z S_2$, omdat een element $x \in V$, dat niet in S_1 bevat kan zijn, noch geen, noch minstens één cijfer 1 kan bevatten en dus niet kan voorkomen.

§ 10. Machtigheden van Soorten.

10.1 :

Def. : [L.E.J. Brouwer, 1924, I; A. Heyting, 1929]

De soorten Q en R over een verzameling V zijn gelijkmachtig $\stackrel{D}{=}$ er is een $(1,1)$ -afbeelding van Q en R op el-
kander te construeren.

Precisering: Een afbeelding f van Q en R noemen we een $(1,1)$ -afbeelding, indien bij ieder $q \in Q$ één en slechts één beeld-element $f(q) = r \in R$ en bij ieder $r \in R$ één en slechts één origineel $q \in Q$, waarvoor dus $f(q) = r$, te vinden is.

Opmerking: De uitspraak " f is een afbeelding van Q op R " kan behalve in de boven gebruikte sterke zin - bij iedere $r \in R$ is een element $q \in Q$ te bepalen, zodat $f(q) = r$ is - ook in negatieve zin gebruikt worden - er bestaat geen $r \in R$, waarbij geen $q \in Q$ bepaald kan worden, zodat $f(q) = r$ is. Hierdoor kan ook de definitie van $(1,1)$ -afbeelding van Q op R in deze negatieve zin gebruikt worden - f is een eenduidige afbeelding van Q op (in negatieve zin) R , waarvoor geldt:

$$f(q_1) = f(q_2) \longrightarrow q_1 = q_2 .$$

10.2 : Als in de klassieke wiskunde definiëren we de machtigheid van een soort Q over een verzameling V , als de soort van alle soorten over V , welke met Q gelijkmachtig zijn.

Een eenvoudige typen van machtigheden zijn:

1^o: De eindige machtigheden, d.w.z. de machtigheden van die soorten, welke met een beginstuk $(1,2,3,\dots,n)$ van de rij der natuurlijke getallen N_n gelijkmachtig zijn.

2^o: De af telbaar oneindige machtigheid, d.w.z. de machtigheid van de soorten, welke met N_n zelf gelijkmachtig zijn.

10.3 :

Def. : Een soort S is oneindig $\stackrel{D}{=}$ S bevat een aftelbaar oneindige deelsoort.

Deze positief geformuleerde eigenschap is sterker dan de negatieve, niet van eindige machtigheid te zijn.

In de klassieke wiskunde zijn vele aequivalente definities van het begrip oneindige verzameling te geven. De definitie van Dedekind luidt: Een verzameling S is oneindig $\stackrel{D}{=}$ er bestaat een echte deelverzameling $D \subsetneq S$, zodanig, dat D en S gelijkmachtig zijn. Klassiek loopt het bewijs, dat de intuïtionistische definitie de door Dedekind geëiste eigenschap

impliceert, als volgt:

S zij te splitsen in S' en $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Kies $D = S' \cup \{a_2, a_3, \dots\}$. De afbeelding f , die de elementen van S' op zichzelf afbeeldt en die aan a_i toevoegt a_{i+1} , is dan een $(1,1)$ -afbeelding van S op D .

Dit bewijs is niet in alle gevallen intuïtionistisch geldig. Het is immers mogelijk, dat we van een gegeven $s \in S$ niet kunnen uitmaken, of $s \in S'$, of $s \in \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ is. Voor een dergelijk element s zou dan $f(s)$ niet bepaald zijn. Dergelijke elementen s treden bijv. op, wanneer we voor S het continuüm en voor $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ de soort van de gehele getallen nemen. Voor het continuüm is echter op een andere wijze eenvoudig een $(1,1)$ -afbeelding op een echte deelsoort te construeren, bijv. door de arctg-functie. Een voorbeeld van een oneindige soort, waarvoor geen $(1,1)$ -afbeelding op een echte deelsoort aan te geven is, is nog onbekend. Een deelsoort S_1 van een soort S is afscheidbaar $\equiv$ voor iedere $s \in S$ is uit te maken, of $s \in S_1$, dan wel $s \notin S_1$ geldt.

Uit het klassieke bewijs volgt nu intuïtionistisch: Bevat een soort S een afscheidbare, aftelbaar oneindige deelsoort S_1 , dan bestaat er een echte deelsoort $D \subsetneq S$, zodanig, dat D gelijkmachtig is met S .

10.4: Niet van iedere soort S is uit te maken of S eindig, dan wel oneindig is.

Een tegenvoorbeeld levert de soort T van alle priemgetallen p , waarvoor ook $p+2$ priem is. Deze soort is wel (door de identieke afbeelding immers) $(1,1)$ af te beelden op een afscheidbare deelsoort van de natuurlijke getallen. Soorten, die deze eigenschap hebben, noemen we telbaar, soorten welke $(1,1)$ af te beelden zijn op een willekeurige deelsoort van de natuurlijke getallen, aftelbaar.

Ook is niet voor iedere soort S te bewijzen, dat, zo S niet oneindig is, S dan eindig is.

Een tegenvoorbeeld levert de soort, welke alleen het getal 1 bevat, wanneer in $\mathbb{N}$ een rijtje voorkomt.

Evenmin is voor iedere soort S te bewijzen, dat, zo S niet eindig is, S dan oneindig moet zijn.

Een tegenvoorbeeld levert de soort S , welke bestaat uit de natuurlijke getallen n , die aan $P(n)$ voldoen, of groter zijn dan een dergelijk getal, terwijl $\neg \bigvee_n [\neg, P(n)]$

wel bekend is, maar $\exists_n [P(n)]$ niet. Voor $P(n)$ kunnen wij bijvoorbeeld nemen, indien k weer 'het vluchtgetal van het rijtjesprobleem' (7.2) is:

$P(n) \equiv [\text{er komt een "rijtje" in } \Pi \text{ voor } \rightarrow n \geq k]$.

§ 11. Orderingstheorie.

11.1:

Def.: Een relatie $x < y$ bepaalt een (lineaire) ordering in een soort $S \equiv \bar{D}$ voor ieder paar elementen $a, b \in S$ geldt één en slechts één van de uitspraken:

$$a < b, a = b, b < a,$$

en voor alle $a, b, c \in S$ geldt:

$$a < b \wedge b < c \rightarrow a < c,$$

$$a = b \wedge a < c \rightarrow b < c,$$

$$a = b \wedge c < a \rightarrow c < b.$$

In een geordende soort is dus steeds uit te maken:

$$a = b \vee a \neq b.$$

Def.: Een soort S , waarin deze laatste eigenschap voor ieder paar $a, b \in S$ geldt, heet discreet.

Iedere geordende soort is dus discreet.

11.2: Op het niet discrete continuum is dus geen lineaire ordering te bepalen. Wel kunnen we (zoals we dit reeds vroeger (4.28; 4.29) gedaan hebben, d.m.v. de relatie $a < b \equiv \bar{D}$ er bestaat een interval nummer i , zodat $A_i < B_i$) op het continuum een pseudo-ordering [A. Heyting, 1925] aangeven, d.w.z. een relatie $x < y$ gekarakteriseerd door de eigenschappen:

I : Voor alle $a, b \in S$ geldt hoogstens één van de uitspraken:

$$a < b, a = b, a > b.$$

II : $\forall a, b, c \in S [a = c \wedge b = d \wedge a < b \rightarrow c < d]$.

III : $\forall a, b, c \in S [a < b \wedge b < c \rightarrow a < c]$.

IV : $\forall a, b \in S [\neg (a > b) \wedge \neg (a < b) \rightarrow a = b]$.

V : $\forall a, b, c \in S [a < b \rightarrow (a < c \vee c < b)]$.

11.3: Is de relatie $x < y$ een pseudo-ordening van de soort S, dan kan d.m.v. de definitie

$$a \prec b \equiv \neg (a > b) \wedge \neg (a = b)$$

een nieuwe relatie bepaald worden. Deze relatie $x \prec y$ is dan een virtuele ordening [L.E.J. Brouwer, 1924, II], d.w.z. zij voldoet aan de eigenschappen I*, II*, III*, IV* analoog aan de eigenschappen I, II, III, IV van de pseudo-ordening en bovendien aan:

$$V^* : \forall a, b \in S [\neg (a > b) \wedge \neg (a = b) \rightarrow a \prec b]$$

Het bewijs hiervan volgt uit een paar eenvoudige stellingen over het verband tussen pseudo-ordening en virtuele ordening.

St.1: $a < b \rightarrow a \prec b$. Uit I en def.: $\prec$.

St.2: $\neg (a \prec b) \rightarrow \neg (a < b)$. Uit st.1.

St.3: $\neg (a < b) \rightarrow \neg (a \prec b)$.

Bewijs: Stel $a \prec b$, d.w.z. (1) $\neg (a > b)$ en (2) $\neg (a = b)$. Maar gegeven is $\neg (a < b)$. Hieruit uit (1) en uit IV volgt $a = b$, wat strijdt met (2).

St.4: $\neg \neg (a \prec b) \rightarrow (a \prec b)$, " $a \prec b$ is stabiel".

Bewijs, direct uit de definitie en de algemene stellingen:

$$\neg \neg (A \wedge B) \rightarrow \neg \neg A \wedge \neg \neg B \text{ en}$$

$$\neg \neg \neg A \rightarrow \neg A.$$

St.5: $a \prec b \rightarrow \neg \neg (a < b)$. Uit st.2, st.3, st.4.

Bewijs van I*: Stel $a \prec b$ en $a > b$, d.w.z.

$$\neg (a > b) \wedge \neg (a = b) \text{ en } \neg (a < b) \wedge \neg (a = b)$$

dan volgt uit IV: $a = b$, dus een contradictie. In de beide andere gevallen volgt de contradictie direct uit de definitie.

Bewijs van II*: Volgt uit de definitie en II.

Bewijs van III*: Volgt uit III, st.5 en

$$\neg \neg A \wedge \neg \neg B \rightarrow \neg \neg (A \wedge B).$$

Bewijs van IV*: Volgt uit IV en st.2.

Bewijs van V*: Volgt uit definitie en st.2.

Wegens V^* heeft de virtuele ordening symmetrischer eigenschappen dan de pseudo-ordening. Maar, omdat zij negatief is, is zij voor de analyse van minder belang. Er bestaan soorten, welke wel een virtuele, maar geen pseudo-ordening toelaten.

§ 12. Welgeordende Soorten.

12.1: Hoewel hij later [Georg Cantor, 1897] tot een meer abstracte opzet kwam, waarbij welgeordende soorten gedefiniëerd werden als geordende soorten, waarvan iedere niet lege deelsoort een eerste element bevat, heeft G. Cantor in zijn eerste publicaties over dit onderwerp [Georg Cantor, 1883] een constructieve opbouw gegeven van het beginstuk van de rij der welgeordende soorten.

12.2: Een hierin volgend, definiëren we de verzameling van de welgeordende soorten als volgt:

A: Basis principe:

Een soort α , welke één en slechts één element bevat -

$\alpha = (a)$ - is welgeordend.

B: Opbouw principes:

I: Zijn α_1 en α_2 disjuncte welgeordende soorten, dan is ook de soort

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

welgeordend. Hierbij verstaan we onder $\alpha_1 + \alpha_2$ de geordende som van α_1 en α_2 , d.w.z. de vereniging van de geordende soorten α_1 en α_2 , zo geordend, dat de elementen van α_1 onderling en die van α_2 onderling hun orde relaties behouden en ieder element van α_1 voorafgaat aan ieder element van α_2 .

II: Vormen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ een aftelbare rij van disjuncte welgeordende soorten, dan is ook de oneindige geordende som hiervan:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$$

een welgeordende soort.

12.3: Wanneer we nu van de bijzondere qualiteiten van de elementen, waaruit we onze welgeordende soorten opbouwen, abstraheren, kunnen we door toepassing van deze principes de rij van de welgeordende soorten beginnen met de soorten

$$1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega 2, \omega 2 + 1, \dots, \omega 3, \dots$$

waarbij $\omega 2 \stackrel{D}{=} \omega + \omega$, $\omega 3 \stackrel{D}{=} \omega + \omega + \omega$, enz. gesteld is.

Iedere uit concrete elementen opgebouwde welgeordende soort S kan nu (1-1)-duidelijk en met behoud van de ordening op één van deze soorten S' , welke uit abstracte eenheden opgebouwd zijn, afgebeeld worden. We zeggen dan, dat S van hetzelfde type is als S' .

Door toepassing van II op een rij van soorten, ieder van

het type ω , verkrijgen we een soort van het type:

$$\omega + \omega + \omega + \dots \bar{\bar{D}} \omega \bar{\bar{D}} \omega^2$$

en verder doorgaand, soorten van de typen:

$$\omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \dots, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \dots, \omega^2 + \omega 2, \dots$$

$$\omega^2 2, \omega^2 2 + 1, \omega^2 2 + 2, \dots, \omega^2 2 + \omega, \omega^2 2 + \omega + 1, \dots, \omega^2 2 + \omega 2, \dots$$

en generaliter, soorten van alle typen

$$\omega^n a_n + \omega^{n-1} a_{n-1} + \dots + \omega a_1 + a_0.$$

Door toepassing van II krijgen we dan:

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots \bar{\bar{D}} \omega^\omega.$$

Hierbij geldt steeds:

$$\omega + \omega^2 = \omega^2, \omega^2 + \omega^3 = \omega^3, \text{ enz.}$$

Na ω^ω weer verder doorgaand krijgen we:

$$\omega^\omega + \omega^\omega 2 + \omega^\omega 3 + \dots \bar{\bar{D}} \omega^{\omega^\omega}.$$

en

$$\omega^\omega + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^{\omega^\omega}} + \dots \bar{\bar{D}} \mathcal{E}_0.$$

Het welgeordende type $\mathcal{E}_0$ voldoet aan de vergelijking, $\omega^{\mathcal{E}_0} = \mathcal{E}_0$, welke volgens Cantor's definitie, de $\mathcal{E}$ -getallen karakteriseert. Een zelfde welgeordend type kan dikwijls als geordende som van verschillende reeksen kleinere welgeordende typen verkregen worden. Niet steeds behoeft het, indien de welgeordende typen α en β verkregen worden als dergelijke oneindige geordende sommen, constructief uit te maken te zijn of $\alpha = \beta$, dan wel $\alpha < \beta$, dan wel $\alpha > \beta$ geldt. We kunnen daardoor de opbouw van welgeordende typen wel voortzetten verder dan $\mathcal{E}_0$, maar krijgen dan een constructief slechts partiëel geordende verzameling hiervan.

12.4: Door transfinitie inductie, d.w.z. door gewone volledige inductie langs de opbouw van de welgeordende soort, kunnen we nu eigenschappen bewijzen, welke voor iedere welgeordende soort α golden.

St. I: Iedere welgeordende soort α heeft een eerste element.

Bewijs: Iedere soort met één en slechts één element heeft een eerste element. Indien α_1 en α_2 ieder een eerste element hebben, heeft $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ een eerste element, namelijk het eerste element van α_1 .

Indien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ ieder een eerste element hebben, heeft $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$ een eerste element.

Dus heeft iedere welgeordende soort α een eerste element.

St. II: Iedere welgeordende soort α is aftelbaar.

St. III: Iedere welgeordende soort α kan gerepresenteerd worden door, d.w.z. met behoud van de ordening één-één-duidelijk afgebeeld worden op, een deelsoort van de verzameling Rat_+ der niet negatieve, rationale getallen.

De bewijzen van de stellingen II en III worden gevoerd door inductie langs de opbouw van α , geheel analoog aan het bewijs van St. I.

Voor St. III maken we gebruik van het lemma:

Is een soort α te representeren binnen Rat_+ , dan is α ook te representeren binnen de soort van de rationale getallen, welke groter dan 1 zijn, en dus, na toevoeging $\frac{p}{q} \mapsto 1 - \frac{q}{p}$, ook binnen de rationale getallen tussen 0 en 1.

12.5: Het is niet mogelijk te bewijzen, dat voor iedere welgeordende soort α de eigenschap geldt, welke G. Cantor aan zijn abstracte opbouw ten grondslag legde, dat namelijk iedere niet lege deelsoort γ van α een eerste element zou bevatten.

Tegenvoorbeeld: Zij α de soort (1,2) en γ de deelsoort van α , welke het element 2 bevat en bovendien ook het element 1, dan en slechts dan, indien in de decimale ontwikkeling van π zeven consecutieve 7's voorkomen. Een aangeven van een eerste element van γ sluit in, dat de vraag over π opgelost is. We kunnen dus de mogelijkheid van dit aangeven niet affirmeren.

12.6: Pogen we alleen te bewijzen, dat iedere niet lege, afscheidbare, deelsoort γ van een welgeordende soort een eerste element bevat, dan is het tegenvoorbeeld uit 12.5 hiermee niet in contradictie, omdat we niet weten, of $1 \in \gamma$ dan wel $1 \notin \gamma$ geldt, en γ dus niet afscheidbaar is.

Een tegenvoorbeeld tegen deze zwakkere stelling is het volgende: Zij α de welgeordende soort van het type $\omega^2 + 1$, welke alle paren van natuurlijke getallen, lexicographisch geordend en bovendien nog het getal 1 bevat. Zij γ de deelsoort van α , welke dit getal 1 bevat, en bovendien nog alle paren (a,b) , waarvoor geldt $a > 2$ en $b_1^a + b_2^a = b_3^a$, waarbij b_1, b_2, b_3 bepaald zijn door de eenduidige ontbinding van b in priemfactoren:

$$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \cdot 7^{b_4} \dots$$

Voor ieder paar (a,b) is uit te maken of $(a,b) \in \gamma$ geldt;

γ is dus afscheidbaar.

Een aangeven van een eerste element van γ zou echter met het oplossen van het probleem van Fermat equivalent zijn. We kunnen dus de mogelijkheid van dit aangeven niet affirmeren.

Het bewijs door inductie langs de opbouw van α loopt mis bij het gebruik van de principes I en II. We hebben geen methode om voor iedere a uit te maken, of er een b bestaat, zodat $(a,b) \in \gamma$ is, en kunnen daardoor niet van iedere α_i uitmaken, of deze een element van γ bevat, of niet.

12.7: In de intuitionistische opbouw worden de niet geldende stellingen uit (12.5 en 12.6) nu vervangen door:

st. IV: Zij α een welgeordende soort en $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ een dalende rij elementen van α , dan heeft deze rij een laatste element a_k .

Het bewijs van deze stellen wordt weer door inductie langs de opbouw van α gevoerd.

Bewijs: Indien α uit slechts één element bestaat, is a_1 het laatste element van de rij.

Indien $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ is en de stelling voor α_1 en α_2 geldt, dan geldt zij ook voor α . Immers, indien

$a_1 \in \alpha_1$ is, liggen alle elementen van de rij in α_1 en heeft de rij dus een laatste element. Indien $a_1 \in \alpha_2$ is, heeft de rij een laatste element a_1 , dat in α_2 ligt.

Is a_1 zelf niet het laatste element van de gehele rij, dan ligt a_{1+1} in α_1 , en dus ook

$$a_{1+1} > a_{1+2} > a_{1+3} > \dots$$

Deze staartrij heeft dus een laatste element in α_1 , dat dan tevens het laatste element van de gehele rij is.

Indien $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$ is en de stelling voor iedere α_i geldt, geldt zij ook voor α . Immers, a_1 ligt in α , dus is er een eindige index i_1 aan te

geven, zodat $a_1 \in \alpha_{i_1}$ is. Volgens de inductiehypothese is er dan een laatste element a_{11} van de rij, dat in

α_{i_1} ligt. Is a_{11} niet het laatste element van de gehele rij, dan ligt a_{11+1} in een zekere α_{i_2} met $i_2 < i_1$.

Er is dus weer een laatste element a_{12} van de rij te vinden, dat in α_{i_2} ligt. Is a_{12} niet het laatste element van de gehele rij, dan gaan we op dezelfde wijze verder. Dit proces kan echter, omdat $\dots i_4 < i_3 < i_2 < i_1$ is, hoogstens

i_1 maal herhaald worden. Men van de elementen a_{1k} met $k \leq i_1$ moet dus blijken het laatste element van de gehele rij te zijn.

Hieruit volgt dus, dat de stelling voor iedere welgeordende soort geldt.*

12.8: Klassiek is stelling IV equivalent met:

Een welgeordende soort bevat geen deelsoort γ van het type

$$\omega^* = (\dots, 5, 4, 3, 2, 1).$$

Intuitionistisch beschouwd is St. IV veel sterker.

St. IV geldt natuurlijk ook voor iedere deelsoort γ van een welgeordende soort α .

12.9: Zij α weer een welgeordende soort, dan definiëren we:

Def.: γ is een beginsegment van α $\bar{D}$ er bestaat een element $c \in \alpha$, zodat γ de soort is van alle elementen van α , welke aan c voorafgaan.

St. V: Ieder beginsegment γ van een welgeordende soort α is zelf welgeordend.

Het bewijs geschiedt weer door inductie langs de opbouw.

12.10: Zij α weer een welgeordende soort, dan definiëren we:

Def.: ζ is een afsluitende fundamentele rij van α $\bar{D}$

ζ is een stijgende rij elementen van α :

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots,$$

zodat $\forall a \in \alpha \exists i [a < a_i]$.

St. VI: Iedere welgeordende soort α bevat een laatste element of een afsluitende fundamentele rij.

Bewijs, weer door inductie langs de opbouw:

I: Zij $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; dan bevat α een laatste element of een afsluitende fundamentele rij, al naar gelang α_2 deze bevat.

II: Zij $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$; dan bevat α de afsluitende fundamentele rij $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, waarbij a_i het eerste element van α_i is.

12.11: Zij α een welgeordende soort en $c \in \alpha$, dan definiëren we:

Def.: c is grenselement van de stijgende fundamentele rij

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots \text{ van elementen van } \alpha \bar{D} \\ \forall a \in \alpha \exists i [a < c \rightarrow a < a_i < c].$$

St.VII: Ieder element c van een welgeordende soort α heeft een onmiddellijk voorafgaand element, of is grenselement van een stijgende fundamentele rij.

Het bewijs wordt gevoerd door een combinatie van St. V en St. VI.

12.12:

St.VIII: Aangaande ieder element c van een welgeordende soort α , is uit te maken, of c het laatste element van α is, of niet.

Bewijs, door inductie langs de opbouw.

St.IX: Ieder element c van een welgeordende soort α is of het laatste element van α , of er bestaat een element d van α , dat onmiddellijk op c volgt.

Bewijs: I: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Dan ligt c , of in α_1 , of in α_2 .

Zij $c \in \alpha_1$, dan heeft c of een onmiddellijke opvolger in α_1 , of c is het laatste element van α_1 . In dit tweede geval is het eerste element van α_2 de onmiddellijke opvolger van c .

Zij $c \in \alpha_2$, dan heeft c of een onmiddellijke opvolger in α_2 en dus in α , of is het laatste element van α_2 en dus van α .

II: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$.

Zij $c \in \alpha_i$. Dan heeft c of een onmiddellijke opvolger in α_i of is het laatste element van α_i . In dit tweede geval is het eerste element van α_{i+1} de onmiddellijke opvolger van c .

§ 13. Voorbereidingen tot het bewijs van de Hoofdstelling over Finiete Spreidingen. Toepassing van de Hoofdstelling of het bewijs van de gelijkmatige continuïteit van volle functies.

13.1: In (8.3) werd bewezen, dat iedere, voor ieder punt van een interval gedefiniëerde, (z.g. volle), functie in dat interval continu is.

Het bewijs, dat iedere, in een afgesloten interval volle functie daar ook gelijkmatig continu is, is, indien we deze gelijkmatige continuïteit in positieve zin verstaan, natuurlijk niet op de klassieke, indirecte, wijze te leveren.

Intuitionistisch moeten we voor dit bewijs gebruik maken van de Hoofdstelling over Finiete Spreidingen.

13.2: Deze Hoofdstelling over Finiete Spreidingen luidt als volgt:

Zij gegeven: Een finiete spreiding $\Sigma = \Sigma(S, T)$;

Een constructieve methode M , waarvan bewezen is, door een bewijs B , dat zij aan ieder element

$\alpha = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \Sigma$ een natuurlijk getal $m(\alpha)$ toevoegt

Dan is constructief te bepalen: Een natuurlijk getal N (afhankelijk van Σ en M , maar niet van α), zodanig, dat voor iedere $\alpha \in \Sigma$ op grond van hoogstens de N eerste keuzen, welke α voortbrengen (d.w.z. na de constructie van een beginsegment $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ van α) $m(\alpha)$ bepaald is.

Het bewijs van deze Hoofdstelling zal in § 14 geleverd worden volgens een aan de intuitionistische wiskunde eigen, door Prof. L.E.J. Brouwer geschapen, methode van reflexie op de wijze, waarop het gegevene (hier speciaal het bewijs B) bekend zou kunnen zijn.

13.3: Bij deze reflexie op het bewijs B merken we op, dat een bewijs steeds bestaan moet uit een welgeordende soort van elementaire bewijs-stappen.

Formeel gezien bestaat een bewijs namelijk slechts uit eindig veel bewijsstappen. Onder deze kunnen echter volledige inducties, samenvattingen van een aftelbare rij van te voren geconstrueerde bewijselementen tot één bewijsstap, voorkomen, en deze kunnen op gecompliceerde wijze over elkander geschakeld worden.

De opbouw van een bewijs geschiedt dus geheel op dezelfde wijze als die van een welgeordende soort.

13.4: In (9.6) is aangetoond, dat ieder afgesloten interval met een finiete spreiding te overdekken is. Dit geeft de mogelijkheid de Hoofdstelling te gebruiken om iets over een, in een afgesloten interval volle, functie te bewijzen. Om de gelijkmatige continuïteit van een dergelijke functie aan te tonen, moeten we nog opmerken, dat, indien twee punten x en x' uit het interval een afstand hebben kleiner dan 2^{-3n-2} (de lengte van het intervalletje, dat twee opeenvolgende

μ_{3n} -intervallen gemeen hebben), er steeds een μ_{3n} -interval aan te geven is, dat hen beide bevat.

Voor x en x' zijn dus μ_{3n} -intervalschakelingen te vinden, welke in hun eerste n termen overeenstemmen (ook andere schakelingen zijn mogelijk, waarvoor dit niet het geval is).

13.5: Onder aanname van de in § 14 te bewijzen Hoofdstelling is nu aan te tonen:

St. : Iedere, in een afgesloten interval I der reële getalrechte volle functie $f(x)$ is in I gelijkmatig continu [L.E.J. Brouwer, 1923; 1924 A].

Bewijs: $f(x)$ is vol in I . Dus bij iedere $x \in I$ moet een reëel getal y te bepalen zijn, zodat $y = f(x)$ geldt.

Maar "iedere $x \in I$ " betekent niet alleen "iedere $x \in I$ ", waarvan de intervalschakeling door een wet gegeven is", maar algemener "iedere $x \in I$ ", waarvan de intervalschakeling door een keuzerij gegeven is". We noemen in dat algemene geval y bepaald door x , indien bij de gegeven x en bij ieder natuurlijk getal k een interval $A_{n(k)}$ van de intervalschakeling van y , met lengte $A_{n(k)} < 2^{-k}$, aan te geven is op grond van de constructie van de eerste $m_{k,x}$ intervallen uit de schakeling van x .

13.6: Voor vaste k mag hierbij het natuurlijke getal $m_{k,x}$ nog van x afhangen, maar het moet voor iedere $x \in I$, dus $x \in \mathbb{Z}$, constructief te bepalen zijn. $\mathbb{Z}$ is een finiete spreiding, op de toevoeging $x \dashrightarrow m_{k,x}$ is dus, bij vaste k , de Hoofdstelling toe te passen.

Deze geeft dan een constructie van een natuurlijk getal N_k , zodat $m_{k,x}$ voor iedere $x \in I$ na hoogstens N_k keuzen bepaald is. Bij iedere keuze is slechts een eindige keuze vrijheid, omdat $\mathbb{Z}$ finiet is. De verzameling van de getallen $m_{k,x}$ voor $x \in \mathbb{Z}$ is dus voor iedere gegeven k eindig en heeft dus een maximum M_k .

13.7: Hieruit volgt, dat voor iedere $x \in I$ (wat overeenkomt met voor iedere $x \in \mathbb{Z}$) de bijbehorende $y = f(x)$ tot op 2^{-k} nauwkeurig te bepalen moet zijn na aangifte van de eerste M_k (nu onafhankelijk van x) intervallen van x .

Bij ieder punt $x' \in I$, dat een afstand tot x heeft kleiner dan 2^{-M_k-2} is nu volgens (13.3) een intervalschakeling te vinden, welke in de eerste M_k intervallen met de schakeling voor x overeenstemt. De bij x' behorende $y' = f(x')$ ligt dus binnen hetzelfde interval $A_{n(k)}$ als $y = f(x)$.

Dus bij ieder natuurlijk getal k is een M_k te bepalen, zodat voor alle x en x' uit I geldt:

$$|x - x'| < 2^{-M_k-2} \longrightarrow |f(x) - f(x')| < 2^{-k}.$$

Dit betekent dus, dat de volle functie $f(x)$ in het afgesloten interval I gelijkmatig continu is.

§ 14. Bewijs van de Hoofdstelling over
Finiete Spreidingen.

14.1: Deze reeds in § 13.2 geformuleerde Hoofdstelling luidt:
Hoofdstelling over Finiete Spreidingen [L.E.J. Brouwer, 1923;
1924 A; 1924 B; 1926; 1954].

Zij gegeven:

een finiete spreiding $Z = Z(S, T)$;
een constructieve toevoegingswet M ,
waarvan bewezen is, door een bewijs B , dat zij aan ieder
element $\alpha = (a_1, a_2, \dots)$ van Z een natuurlijk getal $m(\alpha)$
toevoegt, dan is constructief te bepalen:

een natuurlijk getal N , (afhankelijk van
 Z en M , maar niet van α) zodanig, dat voor iedere
 $\alpha \in Z$ op grond van hoogstens de N eerste keuzen, welke
 α voortbrengen (d.w.z. na de bepaling van hoogstens N ter-
men $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ van α) $m(\alpha)$ te berekenen is.

14.2: Opmerkingen:

1). De toevoegingswet T , welke aan oneindige, door
 S toegelaten rijen $\alpha = (a_1, a_2, \dots)$ van natuurlijke getallen
oneindige rijen $\Pi = (P_1, P_2, \dots)$ van mathematische entiteiten
toevoegt, is bij de Hoofdstelling van geen belang. We kunnen
immers in plaats van de toevoeging M van natuurlijke getallen
 $m(\Pi)$ aan de elementen Π van Z , ook direct de toevoe-
ging $m(\alpha)$ van m aan de Π voortbrengende rijen
 $\alpha = (a_1, a_2, \dots)$ onderzoeken en deze laatste als de eigen-
lijke elementen van Z beschouwen.

14.3: 2). De Hoofdstelling berust essentiëel op de onder-
stelling, dat de toevoeging M van $m(\alpha)$ aan α construc-
tief bepaald is voor iedere $\alpha \in Z$. Dit moet hier in die
zin opgevat worden, dat we ook een methode hebben om in een
eindig, en bij gegeven α bekend, aantal bewerkingen $m(\alpha)$
te bepalen voor een keuzerij $\alpha = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, waarbij
we slechts weinig of geen informatie hebben over de rij
als geheel, maar slechts weten, hoe we (bijvoorbeeld op grond
van de uitkomsten van een ons verder onbekende rekenmachine,
van dobbelspelen, door het aan een bepaalde wiskundige te
vragen, door zelf willekeurige door S toegelaten keuzen te
doen) voor willekeurige eindige k een beginsegment
 $a = (a_1, \dots, a_k)$ van α kunnen construeren.

14.4: Er moet dus zeker voor iedere α een getal $f(\alpha)$ door M constructief te bepalen zijn, zodanig, dat $m(\alpha)$ op grond van het eindige beginsegment van α

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_{f(\alpha)})$$

te berekenen is.

Dat dit ook geldt voor die rijen α , welke door een wet bepaald zijn, is op dezelfde wijze als in (8.3) aan te tonen. Het bewijs van de continuïteit van een volle functie in (8.3) komt trouwens geheel overeen met het hier gegeven bewijs van het bestaan van de functie $f(\alpha)$.

Aan iedere door S toegelaten voortzetting α^* van dit beginsegment

$$a = (a_1, \dots, a_{f(\alpha)})$$

is nu zeker hetzelfde natuurlijke getal $m(\alpha^*) = m(\alpha)$ toegevoegd.

Andersom kan echter aan iedere door S toegelaten oneindige voortzetting α^* van een zekere beginsegment

$$a = (a_1, \dots, a_k)$$

een zelfde getal $m(\alpha^*)$ toegevoegd zijn, zonder dat uit de formulering van de toevoegingswet M zelf direct volgt, dat $m(\alpha^*)$ reeds bij gegeven beginsegment

$$a = (a_1, \dots, a_k)$$

te berekenen is. In dat geval kan dus nog $f(\alpha^*) > k$ zijn.

14.5: De Hoofdstelling beweert, dat bij een finiete spreiding Σ ook een van α onafhankelijke bovengrens N voor $f(\alpha)$ te bepalen is.

Een tegenvoorbeeld toont aan, dat dit voor een willekeurige spreiding Σ niet het geval behoeft te zijn.

$\Sigma = \Sigma(S, T)$. S bepaalt, dat voor iedere a_1 ieder willekeurig natuurlijk getal gekozen mag worden.

$$m(\alpha) = a_{a_1}$$

Na de keuze van a_1 is dus $f(\alpha) = a_1$ bekend.

a_1 is echter een geheel willekeurig te kiezen natuurlijk getal. Een bovengrens N is dus zeker niet aan te geven.

14.6: De Hoofdstelling wordt bewezen als een corollarium van de voor willekeurige spreidingen Σ en constructieve toevoegingen M van een natuurlijk getal $m(\alpha)$ aan iedere $\alpha \in \Sigma$ geldende welordeningsstelling.

Aan de formulering hiervan laten we enige opmerkingen en definities voorafgaan.

14.7: We beschouwen hiertoe de verzameling μ van de eindige beginsegmenten

$$a = (a_1, \dots, a_k)$$

zowel van door S toegelaten, als van door S niet toegelaten keuzerijen.

Van ieder element a van μ is het nu bij gegeven toevoegingswet M uit te maken, in welke van de vier volgende disjuncte deelsoorten μ_1, μ_2, μ_3 of μ_4 van μ dit element gelegen is.

Hierbij is:

$\mu_1 \equiv$ de soort van alle beginsegmenten $a = (a_1, \dots, a_k)$ uit μ , waarvoor:

- 1^o: iedere keuze a_i , voor $i = 1, \dots, k$, door S toegelaten is;
- 2^o: het getal $m(\alpha)$ voor willekeurige oneindige voortzettingen α van a , wanneer de eerste k getallen a_i gegeven zijn, op grond van de formulering van M te berekenen is, zodat dus $f(\alpha) \leq k$ geldt;
- 3^o: voor geen eigenlijk beginstuk $a^\#$ van a 2^o geldt, zodat nu ook $f(\alpha) = k$ geldt.

$\mu_2 \equiv$ de soort van alle beginsegmenten $a = (a_1, \dots, a_k)$ uit μ , waarvoor:

- 1^o: alle keuzen a_i voor $i = 1, \dots, k-1$ door S toegelaten worden;
- 2^o: de keuze a_k door S niet toegelaten wordt;
- 3^o: geen beginstuk $a^\#$ van a tot μ_1 behoort.

$\mu_3 \equiv$ de soort van alle beginsegmenten $a = (a_1, \dots, a_k)$ uit μ , waarvoor een eigenlijk beginstuk, $a^\# = (a_1, \dots, a_l)$ met $1 < k$, tot μ_1 of μ_2 behoort.

$\mu_4 =$ de soort van alle beginsegmenten $a = (a_1, \dots, a_k)$ uit μ , welke noch in μ_1 , noch in μ_2 , noch in μ_3 bevat zijn.

μ_4 bestaat dus uit alle door S toegestane beginsegmenten a , waarvoor $m(\alpha)$ nog niet voor alle voortzettingen α van a op grond van de methode M bij gegeven a berekend kan worden.

14.8: Een deelsoort μ^* van μ kan zeker, evenals μ zelf, lexicographisch (d.w.z. naar de eerste verschillen, zodat $(1, 2, 15, 3, 8)$ voor $(1, 2, 15, 3, 8, 2)$ en dit voor $(1, 2, 15, 3, 9)$ komt) geordend worden. Deze lexicographische ordening impliceert de mogelijkheid van een lexicographische afbraak van μ^* , d.w.z. een voorstelling van μ^* als de vereniging van een eindige of aftelbare rij van deelsoorten (nl. van de deelsoorten, welke bestaan uit die elementen, waarvan de eerste coördinaat het getal 1, resp. het getal 2, het getal 3, ... is), een dergelijke voorstelling van deze deelsoorten, enz.

Bij een willekeurige deelsoort μ^* van μ is het in het algemeen niet waar, dat deze lexicographische afbraak ergens beëindigd wordt, d.w.z. dat we in een eindig aantal stappen tot slechts uit één element bestaande beginsoorten komen.

14.9: We noemen een deelsoort μ^* van μ nu lexicographisch welgeordend, indien met deze lexicographische afbraak van μ^* een opbouw van μ^* als een welgeordende soort correspondeert, en formuleren als volgt de

Welordeningsstelling :

Voor iedere spreiding $\Sigma = \Sigma(S, T)$ en voor iedere toevoegingswet M , welke aan iedere α uit Σ op constructieve wijze een natuurlijk getal $m(\alpha)$ toevoegt, is de door M , als in (14.7) beschreven, bepaalde soort $\mu_1 \cup \mu_2$ lexicographisch welgeordend.

14.10: Om nog eens duidelijk te doen zien, hoe de geldigheid van de welordeningsstelling, zowel als van de Hoofdstelling, afhangt van wat intuïtionistisch verstaan wordt onder een constructieve toevoeging van een natuurlijk getal $m(\alpha)$ aan iedere willekeurige $\alpha \in \Sigma$, geven we hier een voorbeeld van een spreiding Σ en bijbehorende toevoegingswet M , welke niet voor iedere $\alpha \in \Sigma$ een constructieve bepaling van $m(\alpha)$ toelaat. Voor de in dit voorbeeld beschouwde combinatie Σ, M geldt dan ook noch de Hoofdstelling, noch de welordeningsstelling.

14.11: Zij Σ de spreiding van alle oneindige keuzereeksen α , bestaande uit getallen 0 en 1 ;

Zij $m(\alpha) = 0$, indien in α alleen getallen 0 voorkomen.

$m(\alpha) = 1$, indien in α minstens een getal 1 voorkomt.

Voor de keuzereeks $\alpha \in \mathbb{Z}$ bepaald door: $a_i = 0$, zolang onder de eerste i decimalen van π geen zeven opeenvolgende 7's voorkomen.

$a_i = 1$, indien dit wel het geval is, is geen constructieve methode bekend om $m(\alpha)$ te bepalen.

De beginsegmenten $a^{(k)}$ bestaande uit k getallen 0 en één getal 1 daaropvolgend, behoren alle tot μ_1 ; $f(\alpha^{(k)})$ is dus $k+1$ voor iedere willekeurige voortzetting $\alpha^{(k)}$ van $a^{(k)}$. $f(\alpha)$ heeft dus geen bovengrens N .

Deze zelfde beginsegmenten $a^{(k)}$ vormen een oneindige, dalende deelrij van μ_1 , dus ook van $\mu_1 \cup \mu_2$. De soort $\mu_1 \cup \mu_2$ is dus niet lexicographisch welgeordend.

14.12: Bewijs van de Welordeningsstelling.

Gegeven is dus, dat er een toevoegingswet M bestaat, welke ons in staat stelt bij iedere α uit $\mathbb{Z}$ een natuurlijk getal $m(\alpha)$ te bepalen. Hieruit volgt (14.3 en 14.4), dat bij ieder $\alpha \in \mathbb{Z}$ ook een natuurlijk getal $f(\alpha)$ te construeren is, zodanig, dat $m(\alpha)$ op grond van de toevoegingswet M te berekenen is, reeds wanneer van α nog slechts het beginsegment $(a_1, a_2, \dots, a_{f(\alpha)})$ bekend is.

14.13: Met behulp van de definities uit (14.7) kan dit gegeven ook geformuleerd worden als:

I : Iedere α uit $\mathbb{Z}$ bezit een beginsegment, dat in μ_1 ligt. We willen nu in de eerste plaats dit gegeven zien als een eigenschap van beginsegmenten van de keuzerijen α uit $\mathbb{Z}$, dus van de elementen van μ , en formuleren het daarom als:

II : Iedere door S toegelaten oneindige voortzetting van een door S toegelaten element a van μ bevat een beginsegment $a^* \in \mu$, dat in μ_1 ligt.

14.14: In de tweede plaats willen we nogmaals de formulering van het gegeven veranderen, nu om te maken, dat het luidt als een eigenschap, niet alleen van door S toegelaten keuzerijen, maar van alle keuzerijen.

Hiertoe maken we er gebruik van, dat een door S niet toegelaten keuzerij zeker een beginsegment in μ_2 bezit.

De formulering, welke we uit II willen afleiden luidt: nu:

III: Iedere oneindige voortzetting α van een beginsegment a uit μ bevat een beginsegment $a^{**} \in \mu_1 \cup \mu_2$.

Daar we bij een gegeven α niet steeds kunnen beslissen, of α door S toegelaten is of niet, is een nadere overweging nodig om te bewijzen, dat III inderdaad uit II volgt.

14.15: Hiertoe merken we ten eerste op, dat het wel bij een gegeven beginsegment $a \in \mu$ beslisbaar is, of $a \in \mu_1$, $a \in \mu_2$, $a \in \mu_3$, dan wel $a \in \mu_4$ is. Indien $a \in \mu_1 \cup \mu_2 \cup \mu_3$ is, is het bewijs van III triviaal.

We kunnen dus onderstellen, dat $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ een element van μ_4 en dus door S toegelaten is.

Zij nu $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$ een willekeurige, oneindige voortzetting (door S al of niet toegelaten) van a . Dan beschouwen we naast α een tweede door S zeker toegelaten, voortzetting

$$\alpha' = (a_1, a_2, \dots, a_n, a'_{n+1}, a'_{n+2}, \dots)$$

van a , welke voldoet aan de volgende eis:

$a'_{n+i} = a_{n+i}$, indien $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+i}$ door S toegelaten worden.

Een dergelijke door S toegelaten α' is, omdat S na m toegelaten keuzen $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ steeds een keuze van a_{m+1} uit een niet lege soort toelaat (9.3), zeker stap voor stap te construeren.

Op α' kunnen we nu II toepassen. Dit gegeven levert ons dus een beginsegment

$$a'^{**} = (a_1, \dots, a_n, a'_{n+1}, \dots, a'_{n+f})$$

van α' , dat in μ_1 ligt.

Nu kunnen we beslissen, of de keuzen $a_{n+1}, \dots, a_{n+f}$ alle door S toegelaten worden. Indien dit het geval is, is ook

$$a^{**} = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+f}) = a'^{**} \in \mu_1.$$

Indien dit niet het geval is, is er een $j \leq f$ te vinden, zodat $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+j}) \in \mu_2$ is. Voor iedere willekeurige voortzetting α van a is dus een beginsegment a^{**} te vinden, zodat

$$a^{**} \in \mu_1 \cup \mu_2 \text{ is.}$$

14.16: Een beginsegment $a \in \mu$ waarvoor III geldt, noemen we verzekerd.

Het gegeven van de welordeningsstelling bevat dus, met de formulering van de toevoegingswet M , een bewijs B , dat ieder element $a \in \mu$ verzekerd is, en, gespecialiseerd, daarmee bij iedere gegeven $a \in \mu$, een bewijs B_a , waaruit volgt, dat a verzekerd is.

14.17: De hoofdgedachte van het bewijs van de welordeningsstelling is nu bevat in de volgende reflexie op de wijze, waarop dit bewijs B_a gegeven zou kunnen zijn.

Ieder bewijs bestaat (13.3) uit een welgeordende soort van door de intuïtie onmiddellijk gerechtvaardigde bewijsstappen.

Het bewijs B_a zal ons $(B_{a,1})$ van zekere elementen van μ onmiddellijk moeten doen inzien, dat deze verzekerd zijn, en kan dan verder $(B_{a,2})$ delen bevatten, die de verzekerdheid van zekere elementen van μ (en uiteindelijk van a) afleiden uit de verzekerdheid van andere elementen van μ .

14.18: De enige elementen $x \in \mu$, waarvoor onmiddellijk $(B_{a,1})$ de verzekerdheid in te zien is, zijn de elementen van $\mu_1 \cup \mu_2$ zelf.

De bewijsdelen $B_{a,2}$ zullen moeten berusten op de relaties " a is een voortzetting van a^* " en " a is een beginstuk van a^* ", welke voor de elementen van μ gedefiniëerd zijn. Zij zullen daarom steeds ontbonden kunnen worden in elementaire bewijsstappen van de volgende twee vormen:

1°: α -conclusie: $y = (y_1, \dots, y_g)$ is verzekerd; dus is iedere onmiddellijke voortzetting $x = (y_1, \dots, y_g, x_{g+1})$ van y ook verzekerd.

2°: β -conclusie: voor iedere keuze van x_{g+1} is de onmiddellijke voortzetting $x = (y_1, \dots, y_g, x_{g+1})$ van y verzekerd; dus is y verzekerd.

14.19: Om nu aan te tonen, dat $\mu_1 \cup \mu_2$ lexicographisch welgeordend is, laten we eerst zien, dat het $\mu_1 \cup \mu_2$ -gevolg van a , d.w.z. die deelsoort van $\mu_1 \cup \mu_2$, die bestaat uit die elementen, welke het willekeurig gekozen element $a \in \mu$ tot beginsegment hebben, deze eigenschap heeft. Indien dit laatste het geval is, zeggen we korter, dat a de welordeningseigenschap heeft, of dat $W(a)$ geldt.

De uitgangselementen van B_a , d.w.z. de elementen x van μ , waarvan in $B_{a,1}$ onmiddellijk de verzekerdheid werd geconstateerd, waren elementen van $\mu_1 \cup \mu_2$ zelf.

Hiervoor geldt zeker $W(x)$. Het $\mu_1 \cup \mu_2$ -gevolg van x bestaat immers alleen uit x zelf en is dus trivialiter lexicographisch welgeordend.

Om nu ook $W(a)$ te bewijzen, passen we een inductie langs de opbouw van $B_{a,2}$ als welgeordende soort toe.

14.20: Hiertoe beschouwen wij een bewijsdeel Γ , dat optreedt in de opbouw van $B_{a,2}$ uit zijn elementaire bewijsschappen. Γ leidt dan uit de verzekerbbaarheid van zekere elementen $x \in \mu$ (de beginelementen van Γ) de verzekerbbaarheid van andere, $y \in \mu$ (de eindelementen van Γ) af.

We definiëren:

[Het bewijsdeel Γ heeft de behoudseigenschap] $\equiv$ [indien alle beginelementen x van Γ de welordeningseigenschap hebben, hebben alle eindelementen y van Γ deze eigenschap ook].

14.21: We zien in, dat iedere afzonderlijke α - en β - conclusie de behoudseigenschap heeft.

Wat de β -conclusie betreft, mogen we aannemen, dat voor iedere keuze van x_{g+1} de $\mu_1 \cup \mu_2$ -gevolgen van het beginsegment $x = (y_1, \dots, y_g, x_{g+1})$ lexicographisch welgeordend zijn. Het $\mu_1 \cup \mu_2$ -gevolg van $y = (y_1, \dots, y_g)$ is hun lexicographisch geordende vereniging en dus ook lexicographisch welgeordend.

Wat de α -conclusie betreft, mogen we aannemen, dat het $\mu_1 \cup \mu_2$ -gevolg van $y = (y_1, \dots, y_g)$ lexicographisch welgeordend is. Het is de lexicographisch geordende vereniging van de oneindige of eindige rij $\mu_1 \cup \mu_2$ -gevolgen van de elementen $x = (y_1, \dots, y_g, x_{g+1})$ voor alle keuzen van x_{g+1} . Deze laatsten moeten dus alle lexicographisch welgeordend zijn.

14.22: De inductie langs de opbouw van het bewijs $B_{a,2}$ berust nu op de volgende, uit de definitie van de behoudseigenschap onmiddellijk voortvloeiende, opmerkingen:

Indien de bewijsdelen Γ_1 en Γ_2 beide de behoudseigenschap hebben, heeft ook hun geordende vereniging de behoudseigenschap.

Indien de bewijsdelen Γ_i voor ieder natuurlijk getal i de behoudseigenschap hebben, heeft ook het bewijsdeel Γ , dat uit de vereniging van de geordende rij der bewijsdelen Γ_i bestaat, de behoudseigenschap.

Het bewijs $B_{a,2}$ is echter als een welgeordende soort door toepassing van bovenstaande twee opbouwprincipes uit

α - en β -conclusies opgebouwd. Dus heeft ook $B_{a,2}$ in zijn geheel de behoudseigenschap.

14.23: De beginelementen van $B_{a,2}$ waren echter de elementen, waarvan door $B_{a,1}$ onmiddellijk de verzekerbaarheid werd ingezien. Maar dit waren de elementen van $\mu_1 \cup \mu_2$ zelf en deze bezaten de welordenings eigenschap (14.18, 14.19).

Hieruit en uit de conclusie van (14.22) volgt, dat het eindelement a van $B_{a,2}$ de welordenings eigenschap heeft.

Dit bewijs is nu te herhalen voor ieder element a van μ , dus zeker voor de slechts uit één keuzegetal bestaande rijen (a_1) voor willekeurige a_1 .

De gehele soort $\mu_1 \cup \mu_2$ is echter als lexicographisch geordende vereniging van de $\mu_1 \cup \mu_2$ -gevolgen van deze één-keuze-elementen (a_1) te schrijven en is dus zelf lexicographisch welgeordend. q.e.d.

14.24: Om nu de Hoofdstelling over Finiete Spreidingen als corollarium van de Welordeningsstelling te bewijzen, mogen we als nieuw gegeven aannemen, dat de spreiding Σ finiet is.

Uit het resultaat, dat de soort $\mu_1 \cup \mu_2$ lexicographisch welgeordend is, kunnen we concluderen, dat ook de soort μ_1 lexicographisch welgeordend is. Immers aan de lexicographische afbraak van $\mu_1 \cup \mu_2$ beantwoordde een welgeordende opbouw. De lexicographische afbraak van μ_1 ontstaat uit die van $\mu_1 \cup \mu_2$ door schrapping van zekere bij deze laatste afbraak optredende soorten. Ook aan de lexicographische afbraak van μ_1 beantwoordt dus een welgeordende opbouw.

14.25: Wegens het finiet zijn van Σ geschiedt de lexicographische afbraak van μ_1 door op iedere trap een soort in een eindig aantal soorten te verdelen. De welgeordende opbouw geschiedt dus door op iedere trap de vereniging van een eindig aantal welgeordende soorten te nemen.

Aan iedere dergelijke, in de welgeordende opbouw van μ_1 voorkomende welgeordende soort η is nu een natuurlijk getal $s(\eta)$ toe te kennen. We doen dit door aan de beginsoorten, die uit één element bestaan, het getal 1, en aan een soort η , die als geordende vereniging van de soorten $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ wordt voortgebracht, het getal $s(\eta) = 1 + \max_{i=1,2,\dots,n} [s(\eta_i)]$ toe te kennen.

Het getal $s(\mu_1)$ is dan tevens de lengte van het langste beginsegment $a \in \mu$, dat in μ_1 bevat is. Met dit getal $s(\mu_1)$ is dus het gezochte getal N geconstrueerd.

§ 15. L i t e r a t u u r .

Een uitgebreide bibliographie van de publicaties verschenen voor 1934 is te vinden in [A. Heyting, 1934], een bibliographie over de "Intuitionistische Logica" en over het mathematische onderzoek van de geformaliseerde intuitionistische systemen wordt gegeven in [S.C. Kleene, 1952].

BELINFANTE, M.J.

1938. Das Riemannsche Umordnungsprinzip in der intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen. *Compositio Math.* 6 (1938) 118-123.

1938 A. Der Lévy'sche Umordnungssatz und seine intuitionistische Übertragung. *Compositio Math.* 6 (1938) 124-135.

1941. Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie. (Erste Mitteilung): Die Cauchyschen Integralsätze und die Taylorsche Reihe. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 44 (1941) 173-186 = *Indagationes Math.* 3 (1941) 64-77.

1941 A. Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie. (Zweite Mitteilung): Der Satz vom Integral der logarithmischen Anleitung I. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 44 (1941) 276-286 = *Indagationes Math.* 3 (1941) 90-100.

1941 B. Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie. (Dritte Mitteilung): Der Satz vom Integral der logarithmischen Ableitung II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 44 (1941) 420-426 = *Indagationes Math.* 3 (1941) 170-176.

1941 C. Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie. (Vierte Mitteilung): Der Weierstrass'sche Unbestimmtheitsatz. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 44 (1941) 563 - 568 = *Indagationes Math.* 3 (1941) 226 - 231.

1941 D. Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie. (Fünfte Mitteilung): Die intuitionistische Übertragung des Picardschen Satzes. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 44 (1941) 711-718 = *Indagationes Math.* 3 (1941) 322-329.

BETH, E.W.

1947. Semantical considerations on intuitionistic mathematics. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 50 (1947) 1246-1252 = *Indagationes Math.* 9 (1947) 572-578.

BROUWER, L.E.J.

1907. Over de Grondslagen der Wiskunde. Amsterdam-Leipzig.

1908. De onbetrouwbaarheid der logische principes. *Tijdschrift voor Wijsbegeerte* 2 (1908) 152-159. Herdruk in [Brouwer, 1919].

1918-1919. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten I & II. *Verh. Nederl. Akad. Wetensch. Afd. Natuurk. Sect. I.* 12 (1918 & 1919) No. 5 & 7.

1919. Wiskunde, Waarheid, Werkelijkheid. Groningen.

1920. Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung? *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* 23 (1920) 955-964 = *Math. Ann.* 83 (1920) 201-210.

1923. Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Verh. Nederl. Akad. Wetensch. Afd. Natuurk. Sect. I. 13 (1923) No. 2.
1924. Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I, II, III. Math. Ann. 93 (1924) 244-258; 95 (1925-1926) 453-473; 96 (1926-1927) 451-489.
- 1924 A. Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 27 (1924) 189-194.
- 1924 B. Bemerkungen zum Beweise der gleichmässigen Stetigkeit voller Funktionen. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 27 (1924) 644-646.
1925. Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie. J. Reine Angew. Math. (Crelle). 154 (1925) 1-8.
1926. Über Definitionsbereiche von Funktionen. Math. Ann. 97 (1926-1927) 60-76.
1929. Mathematik, Wissenschaft und Sprache. Monatsh. Math. 36 (1929) 153-165.
1933. Weten, Willen, Spreken. Euclides 9 (1933) 177-193.
1939. Zum Triangulationsproblem. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 42 (1939) 701-707 = Indagationes Math. 1 (1939) 248-254.
1942. Die repräsentierende Menge der stetigen Funktionen des Einheitskontinuums. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 45 (1942) 443-444 = Indagationes Math. 4 (1942) 154-155.
- 1942 A. Zum freien Werden von Mengen und Funktionen. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 45 (1942) 322-324 = Indagationes Math. 4 (1942) 107-109.
- 1942 B. Beweis dass der Begriff der Menge höherer Ordnung nicht als Grundbegriff der intuitionistischen Mathematik in Betracht kommt. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 45 (1942) 791-794 = Indagationes Math. 4 (1942) 274-277.
1947. Richtlinien der intuitionistische wiskunde. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 50 (1947) 339-340 = Indagationes Math. 197-198.
1948. Consciousness, philosophy, and mathematics. Library of the Tenth International Congress of Philosophy. Amsterdam 1948, Vol. I, Proceedings of the Congress, pp. 1235-1249.
- 1948 A. Essentiëel-negatieve eigenschappen. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 51 (1948) 963-965 = Indagationes Math. 10 (1948) 322-324.
- 1948 B. Opmerkingen over het beginsel van het uitgesloten derde en over negatieve asserties. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 51 (1948) 1239-1244 = Indagationes Math. 10 (1948) 383-388.
1949. De non-aequivalentie van de constructieve en de negatieve orderrelatie in het continuum. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 52 (1949) 122-125 = Indagationes Math. 11 (1949) 37-40.
- 1949 B. Contradictoriteit der elementaire meetkunde. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 52 (1949) 315-317 = Indagationes Math. 11 (1949) 89-91.
1950. Remarques sur la notion d'ordre. C.R. Acad. Sci. Paris 230 (1950) 263-265.

- 1950 A. Sur la possibilité d'ordonner le continu. C.R. Acad. Sci. Paris 230 (1950) 349-350.
1951. On order in the continuum, and the relation of truth to non-contradictority. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 54 (1951) = Indagationes Math. 13 (1951) 357-359.
1952. Historical background, principles and methods of intuitionism. South African J. Sci. 49 (1952) 139-146.
- 1952 A. An intuitionistic correction of the fixed point theorem on the sphere. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 213 (1952) 1-3.
- 1952 B. Over accumulatiekernen van oneindige kernsoorten. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 55 (1952) = Indagationes Math. 14 (1952) 439-442.
- 1952 C. Door klassieke theorema's gesignaleerde pinkernen die onvindbaar zijn. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 55 (1952) = Indagationes Math. 14 (1952) 443-446.
1954. Points and Spaces. Canadian J. Math. 6 (1954) 1-17.
- 1954 A. Addenda en corrigenda over de rol van het principium tertii exclusi in de wiskunde. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 (1954) = Indagationes Math. 16 (1954) 104-106.
- 1954 B. Nadere addenda en corrigenda over de rol van het principium tertii exclusi in de wiskunde. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 (1954) = Indagationes Math. 16 (1954) 109-112.
- 1954 C. Ordnungswechsel in Bezug auf eine coupierbare geschlossene stetige Kurve. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 (1954) = Indagationes Math. 16 (1954) 112-114.
- 1954 D. Intuitionistische Differentiëerbaarheid. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 (1954) = Indagationes Math. 16 (1954) 201-204.
- 1954 E. An example of contradictority in classical theory of functions. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 (1954) = Indagationes Math. 16 (1954) 204-206.

CANTOR, GEORG

1883. Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. V. Math. Ann. 21 (1883) 545-592.
1897. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. II. Math. Ann. 49 (1897) 207-247.

CHANDRASEKHARAN, K.

1942. Intuitionistic theory of linear order. Math. Student. 10 (1942) 149-163.

CORPUT, J.G. VAN DER

1946. On the fundamental theorem of algebra I, II, III. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 49 (1946) 722-733, 878-887, 985-995 = Indagationes Math. 8 (1946) 430-441, 449-458, 605-615.

COURANT, R.

1934. Differential and Integral Calculus. New York, 1937 (second edition).

DANTZIG, D. VAN

1942. On the affirmative content of Peano's theorem on differential equations. *Nederl.Akad.Wetensch.Proc.Ser.A.* 45 (1942) 367-374 = *Indagationes Math.* 4 (1942) 140-147.

1942 A. A remark and a problem concerning the intuitionistic form of Cantor's intersection theorem. *Nederl.Akad.Wetensch.Proc.Ser.A.* 45 (1942) 374-376 = *Indagationes Math.* 4 (1942) 147-149.

1947. On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics. *Nederl.Akad.Wetensch.Proc.Ser.A* 50 (1947) 918-930, 1092-1104 = *Indagationes Math.* 9 (1947) 429-441, 506-518.

1949. Comments on Brouwer's theorem on essentially-negative predicates. *Nederl.Akad.Wetensch.Proc.Ser.A.* 52 (1949) 949-958 = *Indagationes Math.* 11 (1949) 347-356.

1949 A. *Mathématique stable et mathématique affirmative.* Congrès International de Philosophie des Sciences. Paris 1949. Vol. II Logique 123-135 = *Actualités Sci. Ind.* No. 1134. Hermann & Cie. Paris 1951.

DINI, U.

1867. *Sulle serie a termini positivi.* *Ann.Univ.Toscane* 9 (1867) parte seconda.

DIJKMAN, J.G.

1946. Einige Sätze über mehrfach negativ-konvergente Reihen in der intuitionistischen Mathematik. *Nederl.Akad.Wetensch.Proc.Ser.A.* 49 (1946) 829-834 = *Indagationes Math* 8 (1946) 532-537.

1948. Recherche de la convergence négative dans les mathématiques intuitionnistes. *Nederl.Akad.Wetensch. Proc.Ser.A.* 51 (1948) 581-693 = *Indagationes Math.* 10 (1948) 232-244.

1952. *Convergentie en Divergentie in de Intuitionistische Wiskunde.* Proefschrift Amsterdam. 's-Gravenhage 1952.

FREUDENTHAL, H.

1936. Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln. *Compositio Math.* 4 (1937) 112-116.

1936 A. Zur intuitionistischen Raumbegriff. *Compositio Math.* 4 (1937) 82-112.

GÖDEL, KURT

1932. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums.* Heft 4 (1931-1932) 34-38.

GOODSTEIN, R.L.

1945. Functiontheory in an axiomfree equation-calculus. *Proc. London Math. Soc.* (2) 48 (1945) 401-434.

1946. The strong convergence of the exponential function. *J- London Math. Soc.* 21 (1946) 200-205.

1950. Mean value theorems in recursive functiontheory. *Proc. London Math. Soc.* (2) 52 (1950) 81-106.

HEYTING, A.

1925. Intuitionistische Axiomatiek der projectieve meetkunde. Proefschrift. Groningen 1925. Noordhoff.

1929. De telbaarheidspraedicaten van Prof. Brouwer. Nieuw Arch. Wiskunde (2) 16 (1929) 47-59.

1930. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. Sitzungsberichte Akad. Berlin (1930) 42-56.

1930 A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. Sitzungsberichte Akad. Berlin (1930) 57-71, 158-169.

1934. Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie. Berlin, Julius Springer, 1934.

1935-1939. Intuitionistische Wiskunde. Mathematica B. 4 (1935-1936) 72-83, 123-128, 129-136.

5 (1936-1937) 62-80, 105-112. 7 (1938-1939) 129-142.

1936. Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn Freudenthal: "Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln". Compositio Math. 4 (1937) 117-118.

1936 A. De ontwikkeling van de intuitionistische wiskunde. Euclides 13 (1936) 129-145.

1939. Les fondements des mathématiques du point de vue intuitionniste. Philosophie Mathématique, ed. F. Gonseth. pp. 67-73 = Actualités Sci. Ind. No. 873. Paris 1939.

1941. Untersuchungen über intuitionistische Algebra. Verh. Nederl. Akad. Wetensch. Afd. Natuurk. Sect. I. 18 (1941) No. 2.

1946. On weakened quantification. J. Symbolic Logic 11 (1946) 119-122.

1947. Formal logic and mathematics. Synthese (Amsterdam) 6 (1947-1948) 275-282.

1949. Spanningen in de Wiskunde. Rede, Amsterdam 1949. Groningen 1949.

1949 A. L'axiomatique intuitionniste. Congrès International de Philosophie des Sciences. Paris 1949. Vol. II: Logique. 81-86 = Actualités Sci. Ind. No. 1134. Hermann et Cie. Paris 1951.

1950. Espace de Hilbert et intuitionnisme. Les méthodes formelles en axiomatiques. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique. No. 26. Paris, 1950, pp. 59-63. Paris 1953.

1951. Note on the Riesz-Fischer theorem. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 54 (1951) = Indagationes Math. 13 (1951) 35-41.

1954. Syllabus College Lineaire Algebra.

(in voorbereiding). Intuitionism; an Introduction. Studies in Logic. Amsterdam

IONGH, J.J. DE

1948. Restricted forms of intuitionistic mathematics. Library of the Tenth International Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948. Vol. I. Proc. of the Congress 744-748.

KELLY, J.B.

1953. On factorization of polynomials. Amer. Math. Monthly 60 (1953) 375-379.

KLEENE, S.C.

1950. Recursive functions and intuitionistic mathematics. Proc. of the International Congress of Mathematicians. Cambridge Mass., 1950. Vol. I. 679-685.

1952. Introduction to Metamathematics. Amsterdam, Groningen, New York 1952.

KNESER, H.

1940. Der Fundamentalsatz der Algebra und der Intuitionismus. Math. Z. 46 (1940) 287-303.

KUMMER, E.E.

1835. Über die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen. J.Reine Angew.Math. 13 (1835) 171-185.

FRINGSHEIM, A.

1916. Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. Leipzig und Berlin.

ROOTSELAAR, B. VAN

1952. Un problème de M. Dijkman. Nederl.Akad.Wetensch. Proc. Ser.A. 55 (1952) = Indagationes Math. 14 (1952) 405-408.

1954. Generalization of the Brouwer Integral. Proefschrift Amsterdam 1954. Amsterdam 1954.

ROSENBLOOM, P.C.

1945. An elementary constructive proof of the fundamental theorem of algebra. Amer.Math.Monthly 52 (1945) 562-571.

SCHMIDT, A.

1949. Wie dürfen wir mit dem Unendlichen umgehen? Math.-Phys.Semesterber. 1 (1949) 200-213.

1950. Mathematische Grundlagenforschung. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. 1,1, Heft 1, Teil 2.

VANDIVER, H.S.

1936. Constructive derivation of the decomposition field of a polynomial. Ann. of Math. 37 (1936) 1-7.

1936 A. On the ordering of real numbers by constructive methods. Ann. of Math. 37 (1936) 7-17.

E R R A T A :

- pag. 8, regel 20 : In plaats van: $p \in A \rightarrow |p| \in |A|$
 leze men: $\exists_p [p \in A \wedge x = |p|] \Rightarrow x \in |A|$
- " 9, " 2 : In plaats van: de constanten $G_1, \dots, G_m$
 leze men: de constanten $c_1, \dots, c_m$.
- " 12, " 29 : In plaats van: $\neg \alpha \neq \beta = \alpha = \beta$
 men leze: $\neg \alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.
- " 13, " 34 : In plaats van: vaak, leze men: veel.
- " 20, " 24 : I.p.v.: ieder rationaal getal
 leze men: ieder rationaal getal r .
- " 31, " 10 : I.p.v.: $\exists_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}$, leze men: $\exists_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}$
- " 38, " 7 : I.p.v.: (a_i) , leze men: (a_{ik}) .
- " 40, " 26 : I.p.v.: en, leze men: een.
- " 40, " 27 : I.p.v.: a_{ij} , leze men: $|a_{ij}|$.
- " 44, " 6 : I.p.v.: $q_j \neq 0$, leze men: $q_j \neq 0$.
- " 45, " 31 : I.p.v.: verzameling, leze men: verzameling.
- " 52, " 30 : I.p.v.: IV_1 , leze men: IV_1^{xx} .
- " 78, " 17 : I.p.v.: stellen, " men: stelling.
- " 80, " 30 : I.p.v.: of, leze men: op.
- " 87, " 39 : I.p.v.: μ_2 , leze men: $\mu_1 \cup \mu_2$.
- " 88, " 34 : I.p.v.: μ_2 , leze men: $\mu_1 \cup \mu_2$.